



Commande dynamique de réseaux de commande de chauffage urbain

Renée Lidin

► To cite this version:

Renée Lidin. Commande dynamique de réseaux de commande de chauffage urbain. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1986. Français. NNT : . pastel-00654162

HAL Id: pastel-00654162

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00654162>

Submitted on 21 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

par

Renée LIDIN

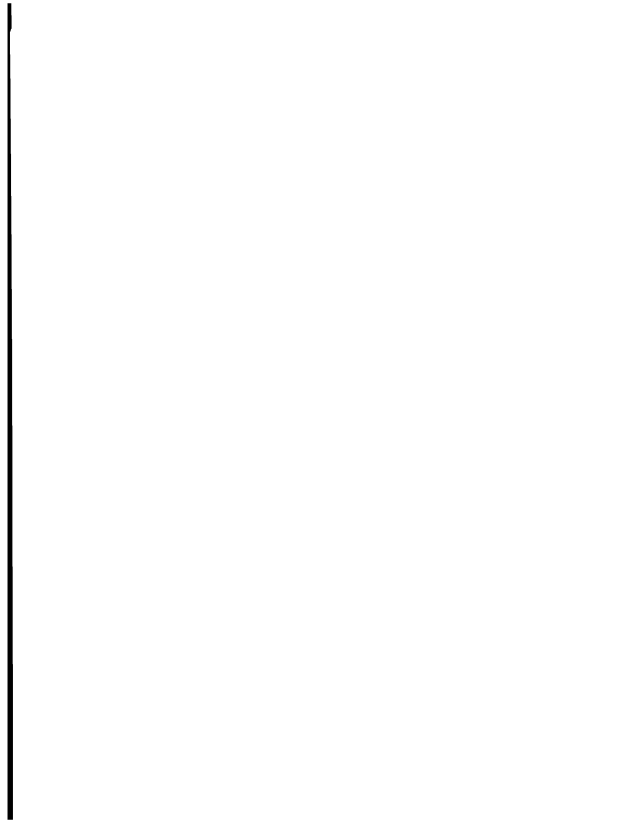
en vue de l'obtention

DU TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR
EN
MATHEMATIQUES ET AUTOMATIQUE

COMMANDE DYNAMIQUE DE RESEAUX DE CHAUFFAGE URBAIN

soutenue le 18 Décembre 1986 devant le Jury composé de

| | | | |
|-----------|--------------|----|-------------------------|
| Messieurs | G. CHAVENT | .. | Président et Rapporteur |
| | A. BAMBERGER | .. | Examinateur |
| | G. COHEN | .. | Examinateur |
| | K. DOUANG | .. | Examinateur |



REMERCIEMENTS

Ces remerciements s'adressent en premier lieu à Monsieur Guy CHAVENT pour m'avoir fait l'honneur de suivre ce travail, de m'avoir apporté de l'aide et fourni de nombreux conseils et d'avoir accepté la présidence de mon jury de soutenance.

Je tiens ensuite à remercier très particulièrement Monsieur Guy COHEN pour avoir dirigé ce travail, pour m'avoir prodigué de très nombreux conseils et encouragements, toujours avec beaucoup de passion et de patience, pour m'avoir appris de nombreuses méthodes de travail. Je voudrais qu'il accepte l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur Alain BAMBERGER, qui m'a fait l'honneur de prendre part à ce jury, et dont les cours à l'Ecole des Mines de Paris m'ont été particulièrement profitables.

Je remercie Monsieur Kong Keo DOUANG, ingénieur à la Compagnie Générale de Chauffage, qui fut tout au long de cette étude un partenaire industriel compréhensif et de conseil précieux, et qui m'a fait le plaisir d'accepter de faire partie de mon jury.

Je remercie Monsieur Jean-Michel CORON, qui a suivi ce travail, qui a toujours répondu avec grande gentillesse et intérêt à mes questions et qui m'a conseillée sur de nombreux points.

Je remercie tous mes collègues du C.A.I. qui ont toujours été disponibles pour me fournir des renseignements scientifiques, des conseils dans le domaine informatique, et de nombreux encouragements. Leur disponibilité et leur compréhension m'ont facilité la tâche.

Enfin, je remercie Mesdames Jacqueline ALTIMIRA et Annick LE GALLIC pour leur contribution à la réalisation de ce document.



S O M M A I R E

| | PAGE |
|---|---------------|
| CHAPITRE I : INTRODUCTION | 13 |
| I. Cadre de l'étude | 13 |
| II. Présentation du problème | 14 |
| III. Organisation de l'étude | 17 |
| CHAPITRE II : MODELISATION DES DIFFERENTS ELEMENTS DU RESEAU | 19 |
| I. Type de réseaux étudiés - Leur schématisation | 19 |
| II. Relations statiques | 22 |
| II.1 Echangeurs primaires | 22 |
| II.1.1. Aspect thermique | 22 |
| II.1.2. Aspect hydraulique | 25 |
| II.2. Vannes de régulation | 25 |
| II.3. Modélisation des canalisations | 26 |
| II.4. Modélisation de la chaufferie | 26 |
| II.4.1. Coût électrique instantané | 27 |
| II.4.2. Coût thermique instantané | 27 |
| II.4.3. Contrainte de fonctionnement à la chaufferie | 27 |
| III. Relations dynamiques | 29 |
| III.1. Modélisation des canalisations | 29 |
| III.1.1. Modèle à trois températures | 29 |
| III.1.2. Modèle à une température | 30 |
| IV. Expression mathématique du coût de fonctionnement du réseau | 33 |

| | |
|---|-----------|
| CHAPITRE III : ASSEMBLAGE RESEAU | 35 |
| I. Rappels sur l'étude du régime statique | 35 |
| I.1. Variables du problème - Notations | 35 |
| I.2. Relations entre les variables caractérisant un noeud k | 39 |
| I.3. Relations entre les variables associées à un noeud k et les noeuds contigus | 39 |
| I.4. Degrés de liberté du problème statique | 40 |
| I.5. Utilisation de la structure réursive en espace du réseau dans la résolution du problème | 42 |
| I.6. Résumé sur la résolution du problème statique | 45 |
| I.6.1. Simulation du régime statique du réseau | 45 |
| I.6.2. Optimisation du régime statique du réseau | 47 |
| I.7. Parallèle avec un système dynamique | 48 |
| II. Calculs dans l'étude du régime dynamique | 49 |
| II.1. Relations instantanées et relations dynamiques | 49 |
| II.2. Variables d'état du problème - Principes généraux de calcul de ces variables | 49 |
| CHAPITRE IV : ANALYSE DE L'EQUATION D'EVOLUTION DES TEMPERATURES DANS UNE CANALISATION | 51 |
| I. Une équation hyperbolique non linéaire | 51 |
| I.1. Remarque sur la signification physique des conditions initiales et aux limites | 52 |
| I.2. Le bouclage par le débit rend l'équation non linéaire | 52 |
| I.3. Changement de variable | 53 |

| | |
|---|----|
| II. Classes des fonctions | 54 |
| III. Courbes caractéristiques | 55 |
| IV. Etude de l'équation exacte | 56 |
| IV.1. Calcul d'une solution de (IV (1)) | 57 |
| IV.1.1. Existence et construction d'une fonction régulière u_0 | 57 |
| IV.1.2. Passage à la limite sur les conditions aux bords | 61 |
| IV.1.3. La fonction u est solution faible de (IV (1)) | 70 |
| IV.1.4. Unicité de la solution régulière u , ϕ et h régulières étant données | 72 |
| IV.2. Accessibilité du système | 73 |
| V. Etude de l'équation approchée | 75 |
| V.1. Rappels généraux sur les méthodes aux différences finies | 75 |
| V.1.1. Approximation des espaces d'études | 75 |
| V.1.1.1. Exemple d'approximation de $L^2(\mathbb{R}^N)$ | 76 |
| V.1.1.2. Application à notre étude | 78 |
| V.1.2. Approximation de l'équation hyperbolique par un schéma aux différences finies | 79 |
| V.1.2.1. Présentation du schéma décentré | 79 |
| V.1.2.2. Le schéma décentré est explicite | 81 |
| V.1.2.3. Condition nécessaire de convergence du schéma | 82 |
| V.1.2.4. Condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma | 83 |
| V.1.2.5. Condition suffisante de convergence du schéma décentré sous certaines hypothèses | 85 |
| V.1.2.6. Diffusion numérique du schéma et déformation des fronts raides | 89 |
| V.1.2.7. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques | 91 |
| V.2. Introduction d'autres schémas numériques | 91 |
| V.2.1. Motivations | 91 |
| V.2.2. Première définition d'un schéma sans diffusion | 92 |
| V.2.2.1. Présentation du schéma | 92 |
| V.2.2.2. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques | 93 |
| V.2.3. Deuxième définition d'un schéma sans diffusion: schéma particulier | 93 |
| V.2.3.1. Principe du schéma particulier | 94 |
| V.2.3.2. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques | 95 |

| | |
|--|------------|
| CHAPITRE V: SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU RESEAU | 97 |
| I. Schéma aux différences finies | 98 |
| I.1. Choix d'une discrétisation | 98 |
| I.2. Vérifications des équations à travers le réseau | 98 |
| I.3. Organisation du calcul des variables | 100 |
| II. Premier schéma sans diffusion | 103 |
| II.1. Choix d'une discrétisation | 103 |
| II.2. Vérification des équations à travers le réseau et construction des grilles temporelles | 103 |
| II.2.1. Notations | 103 |
| II.2.2. Remarques sur les relations statiques et dynamiques | 103 |
| II.2.3. Expression des conditions de causalité temporelle à respecter au cours des calculs | 104 |
| II.2.4. Remarque sur le calcul des températures retour et des différences de pression | 105 |
| II.2.5. Description d'un algorithme de calcul des variables d'état, températures et débits | 106 |
| II.2.6. Calcul des différences de pression en simulation | 107 |
| II.3. Particularités du deuxième schéma | 109 |
| II.3.1. Transformations des relations statiques existant à travers le réseau | 109 |
| II.3.2. Effets de pas de temps de tailles très différentes dans les grilles temporelles de deux noeuds contigus | 113 |
| II.3.3. Evaluation de la demande totale instantanée sur le réseau utile au calcul du coût thermique | 113 |
| III. Schéma particulière | 116 |
| III.1. Choix d'une discrétisation | 117 |
| III.2. Organisation des calculs | 117 |
| III.2.1. Suivi de la position d'une particule entre deux dates d'échantillonnage | 118 |
| III.2.2. Suivi du niveau thermique d'une particule | 119 |
| III.2.3. Calcul des autres variables du réseau | 123 |

| | |
|--|------------|
| CHAPITRE VI : OPTIMISATION DU PROBLEME | 125 |
| I. Etude du problème de minimisation en dimension infinie | 125 |
| II. Etude du problème de minimisation en dimension finie | 130 |
| II.1. Discretisation des fonctionnelles | 130 |
| II.2. Discretisation du critère | 131 |
| II.3. Ecriture des équations de fonctionnement du système | 131 |
| II.4. Variables données du problème et variables d'état du problème | 132 |
| II.5. Discretisation des contraintes | 133 |
| II.6. Ecriture du problème en discret | 134 |
| III. Rappels généraux sur les méthodes de dualité | 137 |
| III.1. Résolution du problème (P) par méthodes duales lagrangiennes simples | 137 |
| III.2. Résolution du problème (P) par méthodes duales lagrangiennes généralisées | 143 |
| IV. Applications à notre problème | 147 |
| IV.1. Ecriture du Lagrangien augmenté L_a | 149 |
| IV.2. Ecriture du Lagrangien élargi L | 150 |
| IV.3. Calculs des équations d'optimalité du problème | 153 |

| | |
|---|------------|
| CHAPITRE VII : RESULTATS DE SIMULATION ET D'OPTIMISATION | 155 |
| I. Simulation | 155 |
| I.1. Schématisation des réseaux étudiés | 155 |
| I.2. Présentation du type de simulations réalisées | 157 |
| I.3. Caractéristiques des réseaux étudiés | 159 |
| I.4. Etude complète des deux simulations | 160 |
| I.4.1. Remarques qualitatives à partir des courbes de température, débit, différence de pression pour les trois schémas | 161 |
| II. Optimisation | 162 |
| II.1 Réseau à une chaufferie et une sous-station | 162 |
| II.1.1. Caractéristiques du réseau | 163 |
| II.1.2. Variation de demande à l'échangeur | 163 |
| II.1.2.1. Aspect qualitatif | 163 |
| II.1.2.2. Aspect quantitatif | 164 |
| II.1.3. Variation de tarif électrique | 164 |
| II.2. Réseau à une chaufferie et deux sous-stations | 164 |
| II.2.1. Aspect qualitatif: étude des courbes optimales | 165 |
| II.2.2. Aspect quantitatif: étude des coûts de fonctionnement | 165 |
| CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES | 167 |
| BIBLIOGRAPHIE | 169 |

ANNEXE I

171

ECRITURE DES CONDITIONS D'OPTIMALITE DU PROBLEME

Utilisation du schéma décentré

Ecriture dans le cas d'un réseau arborescent à deux branches

| | |
|--|-----|
| 1. Ecriture du Lagrangien augmenté L_a | 171 |
| 2. Ecriture du Lagrangien élargi L | 173 |
| 3. Dérivation de L par rapport aux variables d'état du problème pour obtenir les équations adjointes | 176 |

ANNEXE II

191

DETAILS DES SIMULATIONS

| | |
|---|-----|
| 1. Caractéristiques des réseaux étudiés | 191 |
| 1.1. Notations et unités utilisées | 191 |
| 1.2. Caractéristiques du réseau 1 | 192 |
| 1.3. Caractéristiques du réseau 2 | 193 |
| 2. Etude complète de la simulation sur le réseau 1 | 194 |
| 2.1. Discretisations adoptées pour les trois schémas | 194 |
| 2.2. Coûts de fonctionnement obtenus pour les trois schémas | 195 |
| 2.3. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'état pour les trois schémas | 196 |
| 2.4. Courbes d'évolution pour une discrétisation plus fine pour le premier schéma | 211 |
| 2.5. Coûts de fonctionnement pour différentes discrétisations | 219 |
| 3. Etude de la simulation sur le réseau 2 | 220 |
| 3.1. Discretisations adoptées pour les deux schémas | 220 |
| 3.2. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'état pour les deux schémas | 221 |

ANNEXE III

237

DETAILS DES OPTIMISATIONS

| | |
|--|-----|
| 1. Réseau à une chaufferie, une sous-station | 237 |
| 1.1. Caractéristiques du réseau | 237 |
| 1.2. Courbes d'évolution des températures, du débit | 237 |
| 2. Réseau linéaire à une chaufferie, deux sous-stations | 250 |
| 2.1. Caractéristiques du réseau | 250 |
| 2.2. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'état | 250 |

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. Cadre de l'étude

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un programme de recherches menées à la Compagnie Générale de Chauffage sur la "conduite optimale de réseaux de chauffage urbain complexes" qui a débuté en 1983. L'objectif de ce programme est l'aide à la conduite de réseaux complexes, et la réduction de leur coût d'exploitation.

Actuellement, la plupart des réseaux de chaleur possèdent des régulations simples (capteurs et régulateurs) ou des régulations "prédictives" (automates programmables associés au fonctionnement de certains éléments du réseau), quelquefois des optimiseurs locaux (calculateurs gérant le fonctionnement optimal de certains éléments du réseau), mais aucun réseau n'est géré globalement automatiquement, ni ne possède d'aide à la gestion automatique. Pour ces gestions automatiques de réseaux il faut posséder des outils logiciels, qui puissent être *soit un guide pour l'utilisateur* (il a alors sous la main un outil qui lui permet de simuler le comportement global du réseau dans certaines conditions de fonctionnement ou même de calculer le fonctionnement optimal global du réseau dans ces conditions; il peut aussi tester différentes configurations de réseau et utiliser ce logiciel en aide au dimensionnement du réseau, dans ce cas il n'utilise pas les outils logiciels en fonctionnement en temps réel.), ou qui puissent être *l'organe central et décisionnel de la gestion globale du réseau* (l'utilisateur utilise dans ce cas les outils logiciels en temps réel pour conduire le réseau.).

C'est dans la perspective d'obtenir ce genre d'outils que le programme de recherches de la Compagnie Générale de Chauffage a démarré.

Dans le cadre de ces travaux, deux axes d'étude ont été poursuivis à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, au Centre d'Automatique et Informatique (C.A.I.), qui sont:

- l'étude en régime statique des réseaux de chaleur
- l'étude en régime dynamique des réseaux de chaleur

Pour situer ces travaux par rapport à d'autres travaux qui ont pu être menés dans ce domaine en France, nous pouvons citer le travail de thèse d'E. Brunier (1978), effectué au Centre de Mathématiques Appliquées et d'Informatique de l'Université de Technologie de Compiègne, dans le cadre d'un contrat avec la COFRETH. Son étude portait sur l'étude d'un réseau simple à une chaufferie et une sous-station, sur la modélisation précise des éléments intervenant dans ce système et l'optimisation essentiellement en régime statique.

II. Présentation du problème

De manière générale, un réseau de chauffage urbain comporte une ou plusieurs chaufferies pouvant utiliser divers combustibles et ne fonctionnant pas forcément toutes en même temps. Ces chaufferies produisent de l'eau à moyenne ou haute température (100°C à 180°C). Des pompes électriques assurent la pression nécessaire pour faire circuler l'eau avec un certain débit à travers le réseau. L'eau chaude, circulant à travers des canalisations aller, délivre la chaleur nécessaire aux sous-stations puis revient vers les chaufferies à travers des canalisations retour. Les sous-stations s'alimentent en eau chaude, soit pour fournir le chauffage domestique, soit pour produire de l'eau chaude sanitaire.

Le système possède **deux types de commandes**: la température aux entrées dans le réseau (c'est à dire à la sortie des chaufferies), et la différence de pression délivrée à la sortie des chaufferies. Chacune de ces commandes représente une fonction du temps dans le cas d'une étude de l'évolution temporelle du réseau, représente un scalaire dans le cas d'une étude statique du réseau.

Dans notre étude et dans les études déjà menées au CAI (I. Bratanu - G. Cohen (1984)), nous nous intéressons à **modéliser et optimiser le fonctionnement de la partie primaire du circuit, c'est-à-dire le comportement hydraulique et thermique de l'eau chaude à partir de sa fourniture à la sortie des chaufferies (ou son entrée dans le réseau), dans sa circulation à travers le réseau jusqu'aux sous-stations et dans son retour vers les chaufferies.**

On suppose connus et donnés par ailleurs les modèles de comportement des chaufferies (nous n'étudions pas l'optimisation du fonctionnement des chaufferies elles-mêmes, ce problème a été étudié pour une application industrielle (G. Cohen - B. Durand (1980)). Pour notre étude, on suppose connue la loi définissant le coût instantané de fonctionnement d'une chaufferie délivrant à l'entrée du réseau, avec un débit donné, l'eau à une température donnée, et recevant au retour du réseau l'eau à une autre température donnée. On doit donc connaître la courbe du coût thermique instantané d'une chaufferie en fonction d'une demande de puissance thermique globale instantanée à l'entrée du réseau.

On suppose connus aussi les modèles de comportement des pompes électriques, que l'on suppose à vitesse variable. Pour notre étude, il s'agit essentiellement de connaître la loi définissant le coût instantané de fonctionnement des pompes délivrant un débit donné sous une différence de pression donnée entre l'entrée et la sortie d'une chaufferie, ou relevant le niveau de pression en un point donné du réseau d'une valeur donnée.

Enfin on suppose connus les modèles de comportement des circuits secondaires. Le circuit primaire à chaque sous-station fournit de la chaleur à un circuit secondaire par le biais d'un échangeur primaire. Le circuit secondaire permet la circulation de l'eau jusque sur les sites, où la chaleur distribuée par le réseau est réellement consommée (cette consommation dépend de plusieurs facteurs, température extérieure, taux d'occupation des locaux, etc...). Ce circuit secondaire est plus ou moins complexe et son comportement peut varier selon les installations. Si dans notre étude nous ne nous préoccupons pas de la

modélisation précise des échangeurs, c'est bien sûr avec la restriction que dans son modèle il n'apparaisse pas de variables de décision intervenant sur la manière de gérer le circuit primaire.

Dans les cas que nous étudions, la température de sortie d'un échangeur sur le circuit secondaire est régulée par une vanne située sur le circuit primaire, qui limite le débit primaire. Le degré d'ouverture de cette vanne, qui détermine le débit primaire, est fonction de la température d'arrivée de l'eau du circuit primaire et des besoins sur le circuit secondaire. On peut donc noter que les débits dans le réseau se déterminent à partir du fonctionnement des sous-stations.

On peut résumer le comportement d'un circuit secondaire (d'un échangeur) par deux relations mathématiques, la première donnant le débit primaire, la seconde la température primaire à la sortie de l'échangeur reliant les deux circuits, en fonction de la température primaire à l'entrée de l'échangeur et en fonction de la puissance thermique instantanée demandée à la sous-station correspondante. Ces deux relations sont des équations statiques, elles peuvent correspondre à un régime statique de l'échangeur, ou signifier que les temps de réponse du circuit secondaire sont négligés dans le modèle utilisé pour l'étude du circuit primaire (cette approximation est justifiée, car les temps de réponse du circuit secondaire sont très faibles par rapport aux temps de transit de l'eau du circuit primaire ou aux plages temporelles sur lesquelles les données primaires sont constantes).

L'étude du fonctionnement du circuit primaire peut être faite en régime stationnaire ou dynamique. Rapidement essayons d'imaginer ce que chacune de ces études peut apporter comme renseignements sur le fonctionnement du réseau et surtout à quel genre de fonctionnement du réseau ces deux études peuvent se rapporter?

L'étude du régime stationnaire nous permet d'établir les meilleurs compromis à faire entre envoyer de l'eau trop chaude dans le réseau, entraînant des pertes thermiques donc un coût thermique plus élevé, ou de l'eau trop froide, entraînant des débits plus importants et donc un coût hydraulique plus important. Nous avons vu que c'est au niveau des sous-stations que des vannes déterminent les débits circulant dans le circuit primaire; l'étude permet d'établir le lien, qui n'est pas intuitif, entre la température envoyée à la chaufferie et les débits primaires, un bouclage implicite reliant ces valeurs par le biais du niveau des pertes thermiques dans les canalisations. L'étude en régime stationnaire est aussi un bon outil pour une aide au dimensionnement des réseaux. En effet il est possible de chiffrer rapidement, en fonction des tailles des canalisations, du choix des caractéristiques des échangeurs, des puissances requises dans le réseau, quels sont les coûts d'exploitation et aussi à quels niveaux se situent les optima en température et en différence de pression. L'expérience montre que les latitudes de variation de ces optima sont importantes en fonction de ces paramètres.

D'autre part quand un réseau est étendu dans l'espace, les canalisations deviennent longues et les temps de transit de l'eau dans les canalisations deviennent importants. Ils ne peuvent donc être négligés que si pendant des durées beaucoup plus longues que ces temps de transit les demandes aux sous-stations sont constantes, et si les tarifs électriques sont constants. On peut alors se demander si un tel réseau

connait des plages de fonctionnement en régime stationnaire ou s'il ne fonctionne qu'en régime transitoire.

De plus, baser l'optimisation du pilotage du réseau sur un modèle stationnaire, c'est aussi se limiter dès le départ dans la classe des commandes *constantes* au cours du temps. Même à conditions extérieures stationnaires, on peut penser que dans certaines circonstances un meilleur optimum peut-être trouvé par exemple dans la classe des commandes *périodiques*.

Pour ces raisons, *l'étude de l'évolution temporelle (dynamique) du réseau* paraît utile et plus adaptée à certains types de fonctionnement.

Rapidement donnons deux exemples où le réseau fonctionne en régime transitoire.

Le matin, l'appel en eau chaude sanitaire et en chauffage est brusquement plus important aux sous-stations; le contrôle de la température au départ du réseau doit prévoir ce phénomène, tenir compte du temps de transit de l'eau vers les sous-stations et des pertes thermiques pour accroître avec une certaine anticipation son niveau thermique. Les stratégies de pilotage ne sont pas intuitives car il est difficile d'établir un compromis entre anticiper une demande par un front de chaleur et ne pas trop augmenter les pertes thermiques. Il ne faut jamais perdre de vue que les stocks de chaleur que l'on souhaite obtenir dans le réseau sont des stocks périssables.

En demi-saison, les demandes aux sous-stations sont faibles. Il est possible que le meilleur contrôle en température ne soit pas un contrôle en régime permanent où les chaufferies fonctionneraient avec un faible rendement mais un contrôle en régime périodique où les chaufferies fonctionneraient alternativement à fort régime, donc avec un bon rendement, puis s'arrêteraient. La durée des plages de ces régimes ou la classe des fonctions commandes seraient dépendantes de la capacité de stockage thermique du réseau.

Dans ces exemples, il apparaît donc intéressant d'étudier les phases transitoires pouvant exister entre les différentes plages de fonctionnement stationnaire du réseau et de pouvoir aussi déterminer les plages de validité des approximations statiques du fonctionnement du réseau.

Il est possible d'aborder l'étude du comportement dynamique du réseau par simulation et par optimisation.

Une simulation dynamique du réseau d'une part permet de voir comment un certain type de contrôle de la température à la chaufferie se répercute dans le réseau (temps de propagation des fronts de chaleur aux différentes sous-stations, effets d'une trop grande, d'une trop faible anticipation de la brusque croissance ou décroissance des demandes, des tarifs, etc...).

Une optimisation dynamique du réseau d'autre part permet de construire des lois de contrôle qui a priori ne sont pas intuitives et permet d'établir les gains réalisés par rapport à des lois de contrôle plus simples et plus intuitives.

Il est à noter cependant que le problème statique comporte beaucoup moins de variables que le problème dynamique (on enlève la dimension temporelle). Il est donc possible de s'intéresser dans l'étude statique à des réseaux beaucoup plus complexes (tailles plus importantes, nombre de sous-stations plus important, et surtout introduction de plusieurs chaufferies dans le réseau). On pourra lire les résultats déjà obtenus lors de l'étude du régime statique (I.Bratanu - G.Cohen (1984)).

III. Organisation de l'étude

Nous allons donner un bref aperçu de la manière dont est construit ce mémoire et décrire rapidement son contenu.

Dans le **second chapitre** de ce mémoire, nous présentons quels types de réseau de chauffage nous étudions. Nous présentons chacun des éléments qui le composent (chaufferie, sous-stations, échangeurs, canalisations, vannes de régulation,...). Nous donnons les relations qui résument le comportement hydraulique ou thermique de ces différents éléments.

Dans le **troisième chapitre**, nous montrons comment ces différents éléments sont connectés entre eux, nous donnons les relations qui permettent de passer d'un élément à un autre. Nous soulignons l'aspect implicite des relations qui lient les débits et les températures dans le réseau. Pour montrer comment les calculs de toutes les variables du réseau peuvent s'enchaîner, nous reprenons l'étude du réseau en régime statique et nous montrons comment le débouclage des relations implicites a pu se faire dans ce cas. Nous donnons les différences essentielles dues à l'aspect dynamique de certaines relations dans l'étude du régime dynamique. Nous évoquons une possibilité différente de déboucler les relations implicites.

Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons l'équation de transport qui régit la propagation des températures dans une canalisation. Nous faisons une étude de l'équation exacte et surtout nous cherchons à montrer que pour des conditions initiales et une commande en température appartenant à certaines classes de fonctions (suffisamment larges pour contenir toutes les lois de commande physiquement envisageables), on peut trouver une solution à cette équation. Nous faisons une étude de l'équation approchée par différents schémas numériques, que nous définissons, dont nous décrivons les particularités de comportement, leurs avantages ou leurs inconvénients.

Dans le **cinquième chapitre**, nous reprenons l'équation de propagation des températures à travers le réseau complet et nous regardons comment le passage d'une canalisation à une autre s'effectue selon les différentes approximations de l'équation de transport que nous avons étudiées au troisième chapitre. Nous montrons aussi comment le calcul de toutes les autres variables du réseau se mènent en parallèle. Ce chapitre peut être considéré comme le chapitre décrivant *diverses méthodes de simulation* du réseau en régime dynamique.

Le **sixième chapitre** est consacré au *problème de l'optimisation* du fonctionnement du réseau en régime dynamique. A partir de l'exemple d'un schéma numérique utilisé pour l'équation de transport,

nous présentons la méthode utilisée pour résoudre le problème de minimisation discrétisé non linéaire sous contraintes.

Dans le **septième chapitre** on présente des résultats de simulation du réseau pour des réseaux relativement simples afin de pouvoir interpréter aisément les résultats obtenus et comprendre les particularités de chaque méthode de discrétisation. On présente des résultats d'optimisation pour un réseau simple à une chaufferie et une sous-station et pour un réseau simple linéaire. Les programmes de simulation et d'optimisation sont conçus pour être utilisés dans l'étude de réseaux arborescents quelconques.

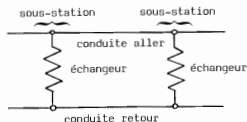
CHAPITRE II

MODELISATION DES DIFFERENTS ELEMENTS DU RESEAU

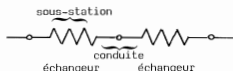
1. Type de réseaux étudiés - Leur schématisation

Dans cette étude des réseaux en régime dynamique, nous nous restreignons au cas de réseaux à **une seule chaufferie**. L'étude de réseaux à plusieurs chaufferies est abordé en régime stationnaire par I. Bratassanu dans le cadre du même contrat industriel et elle est la source de difficultés qui ne seront pas abordées ici.

Nous étudions des **réseaux arborescents** où toutes les sous-stations sont connectées en **parallèle**. Une sous-station est dite **en amont** (ou **en aval**) d'une autre si elle est plus proche (ou plus loin) de la chaufferie dans le sens de parcours du réseau de la chaufferie (racine de l'arbre) vers les noeuds extrémaux (noeuds feuilles). La notion amont (ou aval) se rapporte au sens de parcours de l'eau dans les canalisations aller qui desservent les sous-stations les unes après les autres. La connection en parallèle (Figure 1) signifie que tout échangeur primaire, associé à une sous-station, a son entrée connectée à une canalisation aller et sa sortie connectée à une canalisation retour. Par opposition, une connection en série (Figure 1) signifie que tout échangeur primaire associé à une sous-station a son entrée connectée avec la sortie de l'échangeur associé à la sous-station en amont et sa sortie connectée avec l'entrée de l'échangeur associé à la sous-station en aval.



Connection en Parallèle



Connection en Série

Figure 1

Nous schématisons le réseau par un arbre composé de noeuds et d'arcs reliant ces noeuds, comme suit:



Figure 2

Le **noeud racine** représente la **chaufferie**, les autres noeuds peuvent représenter des **sous-stations**, les noeuds extrémaux nommés aussi **noeuds feuilles** représentent obligatoirement des **sous-stations**.

Les **arcs** reliant deux noeuds représentent les **conduites aller et retour** reliant ces deux noeuds.

Nous introduisons la notion de **noeud fictif**, sans sous-station, **artifice utile à ce que tout arbre puisse se ramener à un arbre binaire**. A chaque embranchement, on introduit si nécessaire des noeuds fictifs pour avoir toujours la même structure, un noeud amont réel et deux noeuds aval fictifs. De cette manière l'étude et la modélisation de tout arbre se ramène à l'étude de l'arbre de base à embranchements binaires et pour tout arbre étudié, la modélisation et les calculs sont basés sur une méthode systématique et complètement générale.

On triple tout noeud embranchement binaire A de la manière suivante:



Figure 3

On transforme un noeud embranchement triple A de la manière suivante:



Figure 4

Nous allons maintenant décrire séparément les différents éléments qui composent le réseau et donner les relations mathématiques (statiques ou dynamiques) qui résument leur fonctionnement.

II. Relations statiques

Nous allons donner la suite des éléments du réseau, dont le fonctionnement est décrit par des relations statiques (ou instantanées) et pour lesquels il peut exister des contraintes de fonctionnement statiques.

II.1. Echangeurs primaires

Nous donnons l'exemple simple d'un échangeur à contre-courant, qui est l'échangeur le plus souvent rencontré.

Deux phénomènes physiques sont à modéliser:

- l'aspect hydraulique
- l'aspect thermique

II.1.1. Aspect thermique

Nous notons génériquement θ les températures ($^{\circ}\text{C}$) et Q les débits massiques (Kg/s). Les indices 1 se rapportent au circuit primaire, les indices 2 se rapportent au circuit secondaire. Les indices e se rapportent au côté entrée dans l'échangeur des deux circuits, et s au côté sortie de l'échangeur des deux circuits:

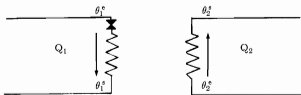


Figure 5

Si on note W la puissance thermique transmise par l'échangeur, C_p la chaleur massique de l'eau ($\text{J/Kg.}^{\circ}\text{C}$), k un coefficient caractérisant la taille et les caractéristiques d'échange thermique de l'échangeur, on a trois relations statiques, une simple (II.1) et une double (II.2) et (II.2bis) qui résument le fonctionnement de l'échangeur.

$$\theta_1^e - \theta_2^e = W h(Q_1, Q_2) (1 - e^{-k h(Q_1, Q_2)}) \quad (II.1)$$

$$W = C_p Q_1 (\theta_1^e - \theta_1^f) \quad (II.2)$$

$$= C_p Q_2 (\theta_2^e - \theta_2^f) \quad (II.2bis)$$

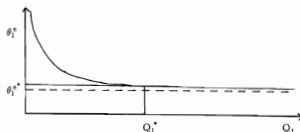
$$\text{avec } h(Q_1, Q_2) = \frac{(\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_2})}{C_p}$$

Que ce soit pour une utilisation pour fournir de l'eau chaude sanitaire ou du chauffage, la température θ_2^e est régulée localement grâce à une vanne située au primaire de l'échangeur, qui limite le débit Q_1 .

On se place dans notre étude dans l'hypothèse où le débit secondaire Q_2 est fixe (pompes à régime fixe). On sait aussi que même si les pompes ne sont pas à régime fixe, à partir d'un certain niveau de débit Q_2 , une variation autour de ce débit Q_2 n'a pas d'influence importante dans les relations d'échange.

La puissance W étant supposée connue (pour la part relative au chauffage, elle peut être reliée aux conditions extérieures), connaissant θ_2^e (régulée à un point de consigne lui-même éventuellement fonction de la température extérieure), on peut calculer θ_2^e par la seconde relation (II.2bis). La relation (II.1), pour une certaine puissance connue W , nous permet de calculer le débit primaire Q_1 , étant donnée une température d'entrée primaire θ_1^f . La relation (II.2) nous permet alors le calcul de la température de sortie primaire θ_1^e .

La relation (II.1) qui exprime la température θ_1^e en fonction du débit Q_1 , toute autre variable étant fixée par ailleurs, est une fonction décroissante, convexe (Figure 6), qui n'est pas partout inversible. Elle admet une asymptote (fonction de la puissance demandée W) quand le débit tend vers l'infini. Physiquement cela signifie que si la température θ_1^e est trop basse, on ne peut trouver de débit suffisamment grand pour satisfaire la puissance demandée.



La puissance W étant fixée

Figure 6

Donc l'inversion de la relation (II.1), qui donne le débit Q_1 en fonction de la température θ_i^s est une **relation statique** et est notée:

$$Q_1 = \Phi(\theta_i^s, W) \quad (\text{II.3})$$

De même la relation qui donne la température à la sortie de l'échangeur θ_i^s en fonction de la température θ_i^e est une **relation statique** et est notée:

$$\theta_i^s = \Psi(\theta_i^e, W) \quad (\text{II.4})$$

La condition, sur le niveau minimum nécessaire de θ_i^s pour un calcul possible de Q_1 , donne lieu à la **contrainte inégalité statique** suivante:

$$\theta_i^s \geq f(W) \quad (\text{II.5})$$

Cette contrainte peut ne pas être satisfaite au cours des algorithmes que nous utilisons. Il faut tout de même pouvoir calculer le débit Q_1 . Nous avons donc remplacé à partir d'un certain point (θ_i^{s*}, Q_1^*) proche de l'asymptote, la courbe réelle par une droite à pente négative ou une fonction polynomiale avec un raccord continu en (θ_i^{s*}, Q_1^*) , pour qu'on puisse calculer le débit Q_1 quelle que soit la température θ_i^s (Figure 6).

II.1.2. Aspect hydraulique

Il est nécessaire de fournir une énergie mécanique sous forme de pression pour pouvoir faire passer un débit primaire donné dans l'échangeur (c'est vrai aussi du côté secondaire). Cette différence de pression minimum à assurer entre l'entrée et la sortie de l'échangeur primaire est proportionnelle au carré du débit.

Si on note R la résistance hydraulique de l'échangeur, on a la **relation statique** suivante:

$$\Delta p_{\min} = R Q_1^2 \quad (\text{II.6})$$

II.2. Vannes de régulation

Nous avons vu qu'au niveau de l'échangeur, sur le circuit primaire, une vanne permet la régulation de la température sortie secondaire θ_2^s . Cette vanne qui limite le débit primaire Q_1 , crée une perte de charge supplémentaire à l'échangeur. Cette perte de charge est faible et constante quand la vanne est grande ouverte. Le coefficient caractérisant cette perte de charge à vanne grande ouverte peut être intégré dans la résistance hydraulique de l'échangeur R .

La perte de charge au niveau de l'échangeur est donc la somme entre la perte créée par cette vanne, plus la perte due à la circulation du débit dans l'échangeur (relation (II.6)).

Ceci se traduit par la **contrainte inégalité statique** suivante:

$$\Delta p \geq R Q_1^2 = g(Q_1) \quad (\text{II.7})$$

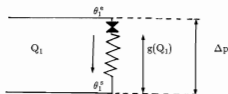


Figure 7

Remarque: Lors du fonctionnement d'un réseau, il apparaît toujours des sous-stations où la vanne de régulation est grande ouverte (c'est à dire où $\Delta p = R Q_1^2$). Dans le cas d'un réseau simple réduit à une chaufferie et une sous-station, la vanne à la sous-station est grande ouverte.

II.3. Modélisation des canalisations

Deux phénomènes physiques sont à modéliser:

- l'aspect hydraulique
- l'aspect thermique

Dans ce paragraphe, nous ne regardons que l'aspect hydraulique où interviennent des relations statiques.

L'eau en mouvement dans les canalisations perd de l'énergie par frottement sur les parois et la pression diminue le long du réseau, de la chaufferie vers les feuilles. C'est la comptabilisation de ces pertes le long du réseau qui permet le calcul de la pression minimale à assurer au départ de la chaufferie et qui donc détermine le coût hydraulique de fonctionnement du réseau.

Les pertes de charge linéiques et singulières sont données par des relations statiques.

- Les pertes de charge (Pascals) *dans une canalisation linéaire* sur une longueur L (mètres) sont fonction du débit selon la loi suivante:

$$\Delta p = \frac{8\lambda L}{\pi^2 \rho D^5} Q^2 \quad (\text{II.8})$$

avec λ = coefficient de perte linéaire de charge (sans dimension)

D = diamètre intérieur de la canalisation (m)

ρ = masse volumique de l'eau (Kg/m^3)

- Si le long de la canalisation se trouve un coude ou un autre accident, il faut ajouter *des pertes de charge "singulières"* données par la relation suivante:

$$\Delta p = \frac{8\xi}{\pi^2 \rho D^4} Q^2 \quad (\text{II.9})$$

avec ξ = coefficient de perte singulière de charge (sans dimension)

Les coefficients λ et ρ dépendent légèrement de la température de l'eau. Nous ignorerons cette dépendance.

II.4. Modélisation de la chaufferie

Il s'agit de donner les expressions d'un **coût thermique** et d'un **coût électrique instantanés**, qui ne fassent intervenir que des variables que nous utilisons dans l'étude du réseau.

II.4.1. Coût électrique instantané

Pour un réseau ne comportant pas de pompes relais, le coût électrique correspond à la puissance instantanée des pompes à la chaufferie, qui envoient le fluide dans le réseau avec un débit Q sous une différence de pression Δp .

Le rendement des pompes électriques à régime variable ρ_e est une fonction des deux paramètres Δp et Q .

Si on note α_e le tarif électrique instantané, on obtient l'expression du **coût électrique instantané** suivante:

$$J_e = \alpha_e \rho_e(\Delta p, Q) \Delta p Q \quad (II.10)$$

II.4.2. Coût thermique instantané

Il correspond à la puissance thermique instantanée envoyée sur le réseau, qui, pour un débit Q du fluide au départ réseau, une température départ chaufferie θ_0^d , une température retour chaufferie θ_0^r , une chaleur massique C_p de l'eau, est $C_p Q (\theta_0^d - \theta_0^r)$.

Le rendement de la chaufferie ρ_{ch} est une fonction de la puissance thermique $C_p Q (\theta_0^d - \theta_0^r)$.

Si on note α_{th} le tarif thermique instantané, on obtient l'expression du **coût thermique instantané** suivante:

$$J_{th} = \alpha_{th} \rho_{th}(C_p Q (\theta_0^d - \theta_0^r)) C_p Q (\theta_0^d - \theta_0^r) \quad (II.11)$$

II.4.3. Contrainte de fonctionnement à la chaufferie

L'eau à l'entrée du réseau est un mélange entre de l'eau de retour du réseau et de l'eau venant de la chaufferie, dans une certaine proportion réglable par une vanne trois voies (c'est là le véritable paramètre de commande de la température au départ de la chaufferie). Cette température de départ est donc toujours comprise entre la température de retour du réseau (niveau bas) et la température de consigne chaudière (niveau haut) (Figure 8).

Ceci se traduit par les **contraintes inégalités statiques** suivantes à la chaufferie:

$$\theta_0^{\max} \geq \theta_0^a \geq \theta_0^r \quad (II.12)$$

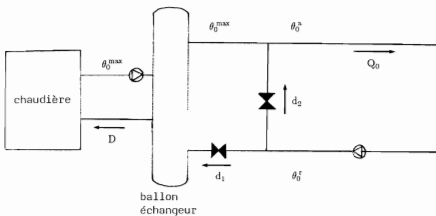


Figure 8

III. Relations dynamiques

Nous allons décrire l'aspect thermique intervenant dans la modélisation des canalisations, et qui donne lieu à une relation d'évolution, c'est à dire une relation dynamique.

III.1. Modélisation des canalisations

Dans ce paragraphe, nous ne regardons que l'aspect thermique où interviennent des relations dynamiques.

La température du fluide est supposée homogène dans une section de la canalisation (écoulement turbulent). Le fluide circule dans des canalisations isolées et placées dans un caniveau, et échange de la chaleur avec l'isolant puis l'air situé autour de la canalisation qui est supposé être à une température constante θ_0 estimée à 40 °C. Le fluide étant supposé incompressible, il circule à la même vitesse quelle que soit la section de la canalisation considérée. Ainsi la vitesse du fluide est une fonction du temps mais pas de l'abscisse dans la canalisation.

III.1.1. Modèle à trois températures

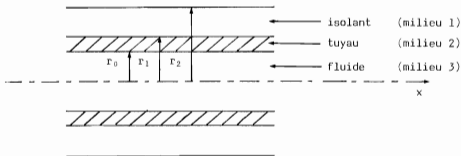


Figure 9

• On adopte les notations de la figure 8:

| | | |
|--------------|--|---------|
| $T_i(x,r,t)$ | température dans le milieu i | $i=0,2$ |
| $w(t)$ | vitesse d'écoulement du fluide à l'instant t | |
| $h(t)$ | température du fluide à l'abscisse $x=0$ | |
| α_i | coefficient de diffusibilité thermique du milieu i | $i=0,2$ |
| k_i | conductivité thermique du milieu i | $i=0,2$ |
| ρ_i | masse volumique du milieu i | $i=0,2$ |
| $C_{p,i}$ | chaleur massique du milieu i | $i=0,2$ |

- T_0 ne dépend pas de r à cause de l'hypothèse de fonctionnement en régime turbulent.
- On pose: $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i C_{p,i}}$ et $K = \frac{2k_1}{\rho_0 r_0 C_{p,0}}$
- La température du milieu extérieur θ_0 est choisie comme origine de l'échelle des températures.

Dans le milieu fluide, on néglige la diffusion en espace de la température devant le phénomène de transport et on obtient les équations suivantes pour l'évolution des températures:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{\partial T_0}{\partial t} + w(t) \cdot \frac{\partial T_0}{\partial x} = -K \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \\ \text{(b)} \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} - \alpha_1 \Delta_r T_1 = 0 \\ \text{(c)} \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} - \alpha_2 \Delta_r T_2 = 0 \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(d)} \quad T_0(x,t) = T_1(x,r_0,t) \\ \text{(e)} \quad T_1(x,r_1,t) = T_2(x,r_1,t) \\ \text{(f)} \quad T_2(x,r_2,t) = \theta_0 = 0 \\ \text{(g)} \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(x,r_1,t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(x,r_1,t) \\ \text{(h)} \quad T_2(0,t) = h(t) \end{array} \right.$$

III.1.2. Modèle à une température

On a étudié la validité d'un modèle simplifié à une température.

Dans ce modèle on remplace les équations (b) et (c) par (b') et (c'):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(b')} \quad \alpha_1 \Delta_r T_1 = 0 \\ \text{(c')} \quad \alpha_2 \Delta_r T_2 = 0 \end{array} \right.$$

Si on note \bar{T}_0 , \bar{T}_1 , \bar{T}_2 les températures de ce modèle à une température, on obtient les relations (i), (j):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \bar{T}_1 = A_1(x,t) \text{Log}(r) + B_1(x,t) \\ \text{(j)} \quad \bar{T}_2 = A_2(x,t) \text{Log}(r) + B_2(x,t) \end{array} \right.$$

D'après les conditions aux limites (d),(e),(f),(g) on peut calculer les fonctions A_1 , A_2 , B_1 , B_2 .

En notant:

$$M = k_1 \text{Log} \frac{r_2}{r_1} + k_2 \text{Log} \frac{r_1}{r_0}$$

on obtient:

$$\begin{cases} A_1(x,t) = -\bar{T}_0(x,t) \left(\frac{k_2}{M} \right) \\ B_1(x,t) = \bar{T}_0(x,t) \left(\frac{k_1 \text{Log} \frac{r_2}{r_1} + k_2 \text{Log} \frac{r_1}{r_0}}{M} \right) \\ A_2(x,t) = -\bar{T}_0(x,t) \left(\frac{k_1}{M} \right) \\ B_2(x,t) = \bar{T}_0(x,t) \left(\frac{k_1 \text{Log} \frac{r_2}{r_1}}{M} \right) \end{cases}$$

La relation (a) devient (a')

$$(a') \quad \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial t} + w(t) \cdot \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial x} = -K \frac{k_2}{r_0} \frac{1}{M} \bar{T}_0(x,t)$$

On a recherché une majoration de $\|T_0 - \bar{T}_0\|_{\infty}$ (cf. Etude de J.M. Coron [1984]).

L'évaluation de cet écart pour des exemples classiques de canalisations, et dans des plages de fonctionnement du réseau où les gradients des températures en temps ne sont pas trop importants a été effectué et il permet de valider le modèle simplifié.

On considérera désormais un modèle à une seule température notée $T(x,t)$.

Cette température du fluide est une fonction de l'espace (c'est-à-dire de la position du fluide dans le réseau), et une fonction du temps et on rappelle que son évolution répond à l'équation aux dérivées partielles hyperbolique suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + w(t) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = -\lambda(T(x,t) - \theta_0) \quad (II.13)$$

Le coefficient λ d'échange thermique global entre l'eau et l'air s'écrit:

$$\lambda = K \frac{k_2}{r_0} \frac{1}{k_1 \text{Log} \frac{r_2}{r_1} + k_2 \text{Log} \frac{r_1}{r_0}} \quad \text{avec} \quad K = 2 \frac{k_1}{\rho_0 C_p \theta_0}$$

Remarque: Quand on étudie le réseau en régime statique, il n'y a plus de dynamique temporelle dans l'équation d'évolution des températures, pour un point donné de l'espace la température est constante, et l'évolution en espace est donnée par la relation suivante, avec le terme $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$ nul:

$$w \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x) = -\lambda(T(x) - \theta_0) \quad (II.14)$$

$$T(x) - \theta_0 = (T(x_0) - \theta_0) e^{-\frac{\lambda}{w}(x-x_0)}$$

IV Expression mathématique du coût de fonctionnement du réseau

Evaluer le coût de fonctionnement stationnaire du réseau, revient à évaluer le coût de fonctionnement instantané du réseau, qui par définition est un coût constant au cours du temps. Ce coût est la somme du coût thermique et du coût hydraulique instantanés, dont les expressions ont été données dans le cadre de la modélisation de la chaufferie.

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= J_{\text{th}} + J_e \\ J_{\text{tot}} &= \alpha_{\text{th}} \rho_{\text{th}} (C_p Q (\theta_0^{\text{a}} - \theta_0^{\text{f}})) C_p Q (\theta_0^{\text{a}} - \theta_0^{\text{f}}) + \alpha_e \rho_e (\Delta p, Q) \Delta p Q \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Pour évaluer le coût de fonctionnement dynamique du réseau, il faut se donner un domaine temporel sur lequel on souhaite étudier le fonctionnement du réseau. Le coût est alors l'intégration sur ce domaine temporel du coût de fonctionnement instantané du réseau, qui est maintenant une fonction du temps.

Si $[0, T_f]$ est le domaine d'intégration du coût on a:

$$\begin{aligned} J_{[0, T_f]} &= \int_0^{T_f} J_{\text{tot}}(t) dt \\ J_{[0, T_f]} &= \int_0^{T_f} (J_{\text{th}}(t) + J_e(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

CHAPITRE III

ASSEMBLAGE RESEAU

On s'intéresse au cas d'un réseau arborescent à une chaufferie, où les sous-stations sont connectées en parallèle.

Brièvement nous allons reprendre l'étude en régime statique, pour souligner l'aspect de structure réursive dans l'espace du réseau et montrer son exploitation dans la manière de propager les calculs des variables du problème à travers le réseau (nous supprimons donc la dimension temporelle et nous n'étudions plus que des relations statiques à travers le réseau, qui pour la plupart restent présentes dans l'étude du régime dynamique: on parle alors de relations

I. Rappels sur l'étude du régime statique

On souhaite établir un bilan thermique et hydraulique du fonctionnement statique du réseau, c'est-à-dire pour toutes les variables du réseau constantes dans le temps. Il est suffisant de connaître les différences de pression et les températures dans le réseau aux extrémités des différentes canalisations, c'est-à-dire en chaque noeud du réseau.

I.1. Variables du problème - Notations

- En prenant les notations des Figures (10, 10.bis, 11, 11.bis), pour un noeud **k** on a:

| | |
|--------------|---|
| θ_k^a | température en A_k (fin de la conduite aller $k-1$ et entrée dans l'échangeur k s'il y a une sous-station en k) |
| θ_k' | température en B_k (sortie de l'échangeur k s'il y a une sous-station en k) |
| θ_k^r | température en C_k (fin de la conduite retour k) |
| θ_k^n | température en D_k (début de la conduite retour $k-1$) |
| S_k | débit massique circulant de A_k à A_{k+1} ou de D_{k+1} à C_k (dans les conduites aller et retour k) |
| Q_k | débit massique circulant de A_k vers B_k (dans l'échangeur k s'il y a une sous-station en k) |
| Δp_k | pertes de charge entre A_k et B_k (aux bornes de l'échangeur k s'il y a une sous-station en k) |

On illustre et détaille la signification de ces notations utilisées sur les Figures (10 et 10.bis) où on schématise un noeud quelconque k avec une sous-station, sur la Figure 11 où on schématise une portion de réseau linéaire avec le noeud chaufferie, des noeuds linéaires, et un noeud feuille, et sur la Figure 11.bis où on schématise un noeud avant embranchement et ses deux noeuds fils après embranchement.

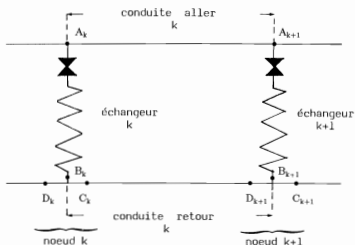


Figure 10

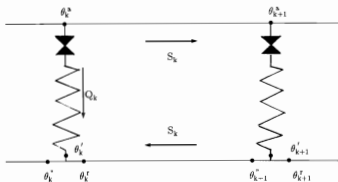


figure 10.bis

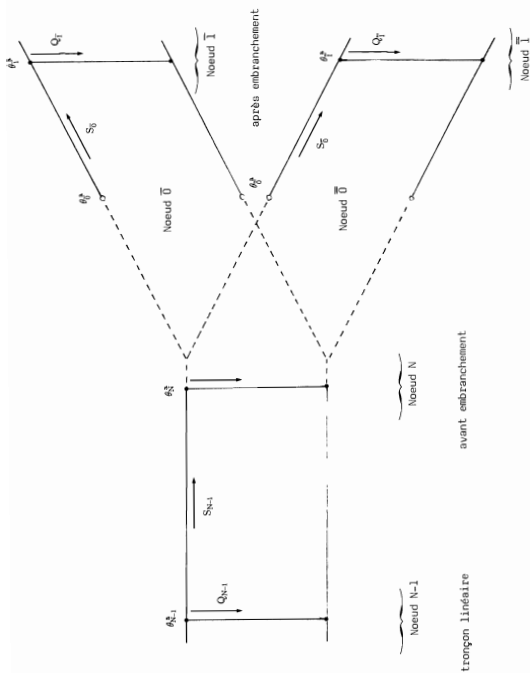


Figure 11.bis

Nous allons énumérer les relations qui existent entre les variables du réseau, que ce soit entre des variables caractérisant un même noeud, ou entre des variables caractérisant des noeuds contigus.

1.2. Relations entre les variables caractérisant un noeud k

- S'il y a une sous-station au noeud k, on peut déduire θ_k' et Q_k de θ_k^a par des équations de fonctionnement de l'échangeur k.

S'il n'y a pas de sous-station au noeud k, Q_k est nul et θ_k' est à une valeur arbitraire.

- θ_k'' se déduit simplement de Q_k , θ_k' , θ_k^a et S_k par la relation de bilan thermique suivante:

$$\theta_k'' = \frac{\theta_k' Q_k + \theta_k^a S_k}{S_k + Q_k} \quad (\text{III.17})$$

Quatre variables suffisent donc pour résumer les bilans thermiques et hydrauliques à un noeud k, qu'on range dans le vecteur $X_k = (\theta_k^a, \theta_k', S_k, \Delta p_k)$

1.3. Relations entre les variables associées à un noeud k et les noeuds contigus

- Sur un tronçon linéaire, on peut relier sur A_k et A_{k+1} les températures θ_k^a et θ_{k+1}^a par la relation (II.14) intégrée qui donne:

$$\theta_{k+1}^a - \theta_0 = (\theta_k^a - \theta_0) e^{-\alpha_k / S_k} \quad (\text{III.18})$$

α_k est fonction des caractéristiques thermiques et de la longueur de la conduite k

- De même on peut relier les températures θ_k' et θ_{k+1}' :

$$\theta_{k+1}' - \theta_0 = (\theta_k' - \theta_0) e^{-\alpha_k / S_k} \quad (\text{III.18bis})$$

On utilise le même coefficient α_k que pour la conduite aller. car on suppose les propriétés thermiques des deux canalisations identiques.

- Sur un tronçon linéaire, on peut relier Δp_k à Δp_{k+1} en comptabilisant les pertes de charge dans la canalisation k.

Si on note r_k^a et r_k' les résistances hydrauliques des canalisations aller et retour k, on a:

$$\Delta p_k = \Delta p_{k+1} + (r_k^a + r_k') S_k^2 \quad (\text{III.19})$$

Les résistances r_k^a et r_k' comprennent les résistances linéiques et singulières, en général on a identité entre les résistances des canalisations aller et retour.

- Sur un tronçon linéaire, on peut relier S_k et S_{k+1} par le bilan suivant:

$$\begin{aligned} S_{k+1} + Q_{k+1} - S_k &= 0 \quad \text{si il y a une sous-station au noeud } k+1 \\ S_{k+1} - S_k &= 0 \quad \text{si il n'y a pas de sous-station au noeud } k+1 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

- A un noeud feuille k , on a à la place de (III.18bis) et (III.20) les relations suivantes:

$$\theta_k^T \text{ arbitraire} \quad (\text{III.21})$$

$$S_k = 0 \quad (\text{III.22})$$

- A un noeud embranchement k ayant pour noeuds fils les noeuds fictifs k_1 et k_2 , on a à la place de (III.20-18-19) les relations suivantes:

$$S_k - S_{k_1} - S_{k_2} = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\theta_k^A = \theta_{k_1}^A = \theta_{k_2}^A \quad (\text{III.24})$$

$$\theta_k^T = (\theta_{k_1}^T S_{k_1} + \theta_{k_2}^T S_{k_2}) / (S_{k_1} + S_{k_2}) = (\theta_{k_1}^T S_{k_1} + \theta_{k_2}^T S_{k_2}) / (S_{k_1} + S_{k_2}) \quad (\text{III.25})$$

$$\Delta p_k = \Delta p_{k_1} = \Delta p_{k_2} \quad (\text{III.26})$$

1.4. Degrés de liberté du problème statique

Le comportement du réseau en régime statique est décrit par les relations que nous venons d'énumérer (III-17, ..., III-26), dont la résolution constitue le **problème statique**.

Nous allons voir que le problème d'optimisation statique comporte deux degrés de liberté, si le réseau est équipé d'une pompe de circulation à vitesse variable à la chaufferie, en ce sens que le choix de deux paramètres permet de déterminer de manière unique toutes les autres variables à travers le réseau, donc de connaître le régime stationnaire du réseau.

Intuitivement ces deux variables indépendantes sont la température θ_0^A au départ chaufferie et la différence de pression au départ chaufferie Δp_0 (ou de façon équivalente la vitesse de la pompe à la chaufferie).

□ Exemple d'un tronçon linéaire à une chaufferie et N noeuds.

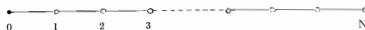


Figure 12

- On a $4(N+1)$ variables qui décrivent totalement le réseau.
 On a $4N$ relations du type (III.18-19-20) pour le tronçon linéaire.
 2 relations du type (III.21-22) pour le noeud feuille.
 Donc on a $4N+2$ relations entre ces variables.

On obtient deux degrés de liberté pour le problème.

□ Exemple d'un arbre à deux branches.

Nous avons vu que l'arbre binaire résume toutes les situations possibles.

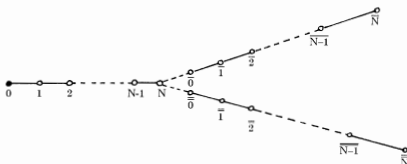


Figure 13

- On a $4(N+\overline{N}+\overline{\overline{N}}+3)$ variables qui décrivent totalement le réseau.
 On a $4(N+\overline{N}+\overline{\overline{N}})$ relations du type (III.18-19-20) pour les tronçons linéaires.
 4 relations du type (III.21-22) pour les noeuds feuilles \overline{N} et $\overline{\overline{N}}$
 4 relations du type (III.24-26) pour les noeuds $N, \overline{0}, \overline{\overline{0}}$
 2 relations du type (III.23-25)
 donc on a $4(N+\overline{N}+\overline{\overline{N}})+10$ relations entre ces variables.

On obtient deux degrés de liberté pour ce problème.

1.5. Utilisation de la structure réursive en espace du réseau dans la résolution du problème.

En prenant comme degrés de liberté du problème θ_0^a , et Δp_0 à la chaufferie, on voit que la résolution de ce système est a priori rendue difficile par le fait qu'il est implicite. En effet soit θ_0^a donnée, on veut calculer S_0 , S_0 dépend de Q_1 qui dépend de θ_1^a qui est lié à θ_0^a par la relation (III.18) faisant intervenir S_0 , on a donc une relation implicite:

$$S_0 = f(g(h(\theta_0^a, S_0) \dots))$$

Par contre, on peut montrer que si on place les degrés de liberté du problème aux feuilles de l'arbre, et qu'ils deviennent θ_N^a et Δp_N , N étant l'indice d'une feuille, on peut calculer toutes les variables restantes de manière simple et récursivement à travers le réseau des feuilles vers la chaufferie.

□ Exemple d'un tronçon linéaire à une chaufferie et N noeuds (Figure 12).

Nous allons montrer que, si les degrés de liberté sont placés à la sous-station feuille et deviennent θ_N^a et Δp_N , nous pouvons calculer toutes les variables restantes de manière simple et récursivement à travers le réseau de la feuille vers la chaufferie.

- On initialise à la feuille le vecteur $X_N = (\theta_N^a, 0, 0, \Delta p_N)$
- On suppose connues les variables de la feuille jusqu'au noeud $k+1$, c'est-à-dire jusqu'au vecteur $X_{k+1} = (\theta_{k+1}^a, \theta_{k+1}^t, S_{k+1}, \Delta p_{k+1})$

La connaissance de θ_{k+1}^a permet le calcul de Q_{k+1} par l'inversion de la relation (II.1).

L'inversibilité de la relation se traduit par une contrainte inégalité sur la température θ_{k+1}^a :

$$\theta_{k+1}^a \geq f_{k+1}(W_{k+1}) \quad (II.5)$$

- On utilise la relation (II.4) pour calculer θ_{k+1}^t .
 - On utilise la relation (III.17) pour calculer θ_{k+1}^a
- On calcule S_k par la relation (III.20): $S_k = S_{k+1} + Q_{k+1}$
 - On calcule θ_k^a par la relation (III.18): $\theta_k^a = (\theta_{k+1}^a - \theta_0) e^{\alpha_k/S_k} + \theta_0$
 - On calcule θ_k^t par la relation (III.18bis): $\theta_k^t = (\theta_{k+1}^t - \theta_0) e^{-\alpha_k/S_k} + \theta_0$

- On en déduit Q_k , θ_k' , θ_k'' et une contrainte inégalité sur θ_k^A comme pour le noeud $k+1$.
- On calcule Δp_k par la relation (III.19):
$$\Delta p_k = \Delta p_{k+1} + (r_k^A + r_k^S) S_k^2$$

Cette différence de pression aux bornes de la sous-station k doit être supérieure à un minimum nécessaire pour faire passer le débit Q_k dans l'échangeur k , on obtient une contrainte inégalité sur Δp_k (l'écart entre la différence de pression Δp_k et celle strictement nécessaire $g_k(Q_k)$ est absorbée par la vanne de régulation qui est mise en série avec le primaire de l'échangeur, cf. Chapitre II Figure 7).

$$\Delta p_k \geq R_k Q_k^2 = g_k(Q_k) \quad (II.7)$$

- Donc on a calculé $X_k = (\theta_k^A, \theta_k^S, S_k, \Delta p_k)$ et on a les contraintes inégalités suivantes pour la sous-station k :

$$\theta_k^A \geq f_k(W_k) \quad (II.5)$$

$$\Delta p_k \geq g_k(Q_k) \quad (II.7)$$

- Ces contraintes sur θ_k^A et Δp_k sont relaxées par dualité lors d'un algorithme d'optimisation.

Nous venons donc de voir comment, dans le cas d'un réseau linéaire, le calcul des variables du réseau peut être mené simplement et récursivement sur le numéro des noeuds, de la feuille vers la chaufferie.

Remarque sur le calcul des différences de pression:

Le calcul des pressions peut se faire après le calcul des autres variables du problème, de manière indépendante.

On peut garder le degré de liberté sur la pression à la chaufferie et propager ce calcul de la chaufferie vers la feuille simplement et récursivement car il n'y a pas de relation implicite intervenant dans le calcul de la pression.

□ Exemple d'un arbre à deux branches (Figure 13).

Si on veut continuer à propager récursivement sur les numéros des noeuds, les variables à travers le réseau, on doit multiplier le nombre de degrés de liberté et en placer deux à chaque feuille. En effet, si on place les deux degrés de liberté en \bar{N} , on calcule facilement les variables de \bar{N} vers \bar{O} , de N vers O , mais les calculs de \bar{O} vers \bar{N} se font dans le sens des relations implicites.

- Pour assurer la récursivité des calculs à l'embranchement formé des noeuds $(N, \bar{0}, \bar{0})$, on a les relations (III.23-25-27-28) à la place de (III.24-26):

$$S_N \quad \bar{S}_0 - \bar{\bar{S}}_0 = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\theta_N^I = (\bar{\theta}_0^I \bar{S}_0 + \bar{\theta}_0^I \bar{\bar{S}}_0) / (\bar{S}_0 + \bar{\bar{S}}_0) \quad (\text{III.25})$$

$$\theta_N^A = (\bar{\theta}_0^A \bar{S}_0 + \bar{\theta}_0^A \bar{\bar{S}}_0) / (\bar{S}_0 + \bar{\bar{S}}_0) \quad (\text{III.27})$$

$$\Delta p_N = (\bar{\Delta p}_0 \bar{S}_0 + \bar{\Delta p}_0 \bar{\bar{S}}_0) / (\bar{S}_0 + \bar{\bar{S}}_0) \quad (\text{III.28})$$

- On doit alors ajouter les deux conditions de compatibilité (correspondant à (III.24-26)):

$$\bar{\theta}_0^A = \bar{\theta}_0^A \quad (\text{III.29})$$

$$\bar{\Delta p}_0 = \bar{\Delta p}_0 \quad (\text{III.30})$$

- Ainsi on a ajouté deux conditions de compatibilité (deux contraintes égalité), et le nombre de degrés de liberté est retombé à deux.
- Les équations de compatibilité (III.29-30) (contraintes égalités) sont relaxées par dualité lors d'un algorithme d'optimisation.

On peut ne calculer que le vecteur $(\theta_k^A, \theta_k^I, S_k)$ des feuilles vers la chaufferie et calculer ensuite Δp_k de la chaufferie vers les feuilles comme on l'a remarqué précédemment. A ce moment là, dans cette manière de mener le calcul des différences de pression la relation (III.28) devient inutile et la relation de compatibilité (III.30) disparaît.

C'est cette dernière alternative qui est retenue pour le programme de calcul, car elle n'introduit pas les contraintes égalités (III.30) à dualiser.

Nous venons donc de voir, dans le cas d'un réseau arborescent quelconque, comment, en utilisant la structure récursive en espace du réseau, nous pouvons mener le calcul des variables du réseau récursivement sur le numéro des noeuds, des noeuds feuilles vers la chaufferie ou de la chaufferie vers les noeuds feuilles.

Le problème comporte donc deux degrés de liberté qui, dans la réalité physique sont θ_0^A et Δp_0 .

Pour déboucler les calculs implicites on doit transformer θ_0^A en une commande fictive simple ou répétée à chaque feuille et ajouter des conditions de comptabilité.

I.6. Résumé sur la résolution du problème statique

I.6.1. Simulation du régime statique du réseau

On donne la valeur de la vraie commande en température à la chaufferie, on souhaite connaître alors les valeurs des autres variables dans le réseau et calculer le coût associé.

Pour calculer les températures aller et les débits à travers le réseau on utilise la méthode du point fixe. On se donne une valeur arbitraire des températures θ_k^a en chaque noeud k ; on en déduit une valeur des débits échangeurs $Q_k = \phi_k(\theta_k^a, W_k)$, relation (II.3), puis des valeurs des débits canaux. Avec ces valeurs des débits canaux, on recalcule en partant de la commande à la chaufferie de nouvelles valeurs θ_k^a avec la formule des pertes thermiques $\theta_k^a = p_k(Q_k + S_k)$, relation (III.18). Avec ces nouvelles températures on calcule de nouveaux débits. On résoud donc un problème de point fixe du type:

$$Q_k = \phi_k(p_k(Q_k + S_k))$$

Le problème se résoud en quelques itérations. La bonne convergence est assurée par le fait que la fonction ϕ_k ou p_k est contractante. En effet, les points de fonctionnement habituels (qui sont solutions) se trouvent dans la partie plate de la fonction p_k et dans la partie de dérivée proche de 1 pour ϕ_k . Donc ϕ_k ou p_k est à dérivée faible autour de la solution. On obtient ainsi une constante de Lipschitz inférieure à 1.

Illustrons cette méthode de point fixe dans le cas à une chaufferie et une sous-station, où on recherche $Q_k = \phi_k(p_k(Q_k))$.

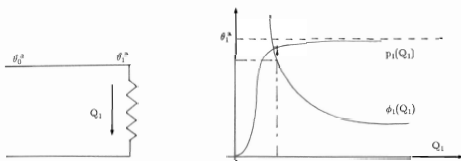


Figure 14

Les températures retour se calculent par la formule des pertes thermiques (III.18bis) avec les débits maintenant connus.

Pour calculer les différences de pression, on doit retenir qu'il existe pour chaque échangeur une contrainte inégalité à satisfaire (fixée par le calcul du débit dans cet échangeur) et que les relations existant entre les différences de pression à travers le réseau sont linéaires en les différences de pression. Rappelons que la différence de pression à la chaufferie est un degré de liberté du système, à savoir qu'une fois les autres variables calculées (températures et débits à partir de la commande en température en chaufferie), la différence de pression en chaufferie peut prendre ses valeurs dans $[\Delta p_{\min}, \Delta p_{\max}]$, Δp_{\min} étant la différence de pression minimum à assurer en chaufferie pour que toutes les contraintes aux échangeurs permettant la circulation des débits soient satisfaites, Δp_{\max} étant la différence de pression maximum pouvant être délivrée par les pompes électriques à la chaufferie.

Nous fixons en simulation le degré de liberté sur la différence de pression à cette valeur minimum; cela correspond à une carte des différences de pression dans le réseau telle qu'une des contraintes aux échangeurs soit devenue égalité, on ne connaît pas a priori cet échangeur. Mais on peut obtenir simplement Δp_{\min} et connaître cet échangeur, en s'appuyant sur la propriété de linéarité des relations en les différences de pression et en utilisant une procédure de calcul en trois étapes:

- On initialise les différences de pression Δp aux noeuds feuilles à des valeurs telles que les contraintes aux échangeurs soient devenues égalités ($\Delta p_k = R_k Q_k^2$), et on initialise une variable auxiliaire μ_k à 0.

- On remonte le calcul des différences de pression des feuilles vers la chaufferie. On déduit la différence de pression au noeud k , Δp_k , de la différence de pression au noeud aval $k+1$, Δp_{k+1} , par la relation inversée (III.19), qui comptabilise les pertes de charge linéiques et singulières entre k et $k+1$ ($(r_k^s + r_k^s) S_k^2$). S'il y a un échangeur au noeud k , Δp_k doit satisfaire la contrainte à l'échangeur k (II.17) selon:

$$\Delta p_k = \Delta p_{k+1} + (r_k^s + r_k^s) S_k^2 \geq R_k Q_k^2$$

Si la contrainte n'est pas satisfaite, on retient l'information et le niveau manquant dans la variable auxiliaire μ_k selon:

$$\mu_k = \max \{ \mu_{k+1}, R_k Q_k^2 - \Delta p_k \}$$

On obtient à la chaufferie le calcul de Δp_0 , qui additionné du niveau μ_0 donne le niveau Δp_{\min} propre à satisfaire les contraintes aux échangeurs.

$$\Delta p_{\min} = \Delta p_0 + \mu_0$$

Le degré de liberté sur les différences de pression a ainsi été fixé par le fait d'obliger une des contraintes à devenir égalité (ce peut être à un échangeur feuille, comme on l'a fixé dans notre

initialisation de calcul, mais ce peut être à un autre échangeur intermédiaire, cf. Figure 15).

- Pour obtenir la véritable carte des différences de pressions admissibles dans le réseau, il suffit de reprendre tous les Δp_k calculés et les remonter de la quantité μ_0

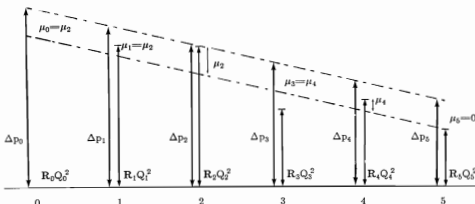


Figure 15

1.6.2. Optimisation du régime statique du réseau

On place des commandes fictives en températures aux feuilles, et les calculs des variables températures et débits à travers le réseau se mènent des feuilles vers la chaufferie. On place la commande en pression à la chaufferie et on propage le calcul des différences de pression de la chaufferie vers les feuilles. L'optimisation calcule d'une part les commandes fictives optimales en températures aux feuilles, et par un dernier calcul des variables des feuilles vers la chaufferie on obtient la vraie commande optimale en température à la chaufferie (vraie signifiant qui correspond à la commande réelle du réseau), d'autre part la différence de pression optimale en chaufferie. Les contraintes sur les températures et les différences de pression sont satisfaites par cet optimum. On peut calculer le coût optimal correspondant à ces commandes optimales.

1.7. Parallèle avec un système dynamique

La structure récursive des calculs dans l'espace, nous permet d'écrire une relation, sur l'indice k des noeuds, de la forme:

$$X_k = F_{k+1}(X_{k+1}) \quad (\text{III.31})$$

avec une initialisation de X_N au noeud N (donnée des deux degrés de liberté θ_N^{Δ} , Δp_N) et la progression des calculs se fait du noeud N vers le noeud 0 .

Dans un système dynamique discrétisé en temps, on a une structure récursive des calculs dans le temps, et on peut écrire une relation, sur l'indice l des dates d'échantillonnage de la forme:

$$\begin{aligned} X_{l+1} &= F_l(X_l, U_l) \\ X_l &: \text{état à l' instant } t_l \\ U_l &: \text{commande à l' instant } t_l \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

avec une initialisation en $k=0$ de X_0 , U_0 et la progression des calculs se fait vers les l croissants.

Ainsi on peut voir que pour la relation (III.32), l'indice k joue le rôle du temps, avec une commande uniquement pour $k=N$. On peut utiliser la similarité des deux structures, pour appliquer à notre problème des méthodes connues de calcul du gradient du coût dans une optimisation dynamique.

II. Calculs dans l'étude du régime dynamique

On souhaite établir un bilan thermique et hydraulique du fonctionnement du réseau sur une durée temporelle choisie. On intègre donc sur cette durée les coûts instantanés, qui demandent la connaissance des différences de pression, des débits et des températures aux extrémités des canalisations à chaque date t .

II.1. Relations instantanées et relations dynamiques

Pour un noeud k à une date donnée t , les quatre variables contenues dans le vecteur $X_k(t) = (\theta_k''(t), \theta_k'(t), S_k(t), \Delta p_k(t))$ résument le fonctionnement de la sous-station k . En effet les relations statiques donnant $\theta_k'(t)$ et $S_k(t)$ en fonction de $\theta_k''(t)$ (relations à l'échangeur k (II.3-4)) restent valables et la relation de mélange donnant $\theta_k''(t)$ selon la formule (III.17) reste valable.

Mais maintenant on ne peut plus relier toutes les variables composant $X_k(t)$ et $X_{k+1}(t)$ à une date donnée t , par une relation statique.

Les relations (III.20-22) pour les calculs des débits ou les relations (III.19-26) pour le calcul des différences de pression restent valables.

Par contre la relation (II.13) décrivant l'évolution des températures sur un tronçon de canalisation A_k et A_{k+1} doit être intégrée en espace et temps, les relations (III.18) et (III.18bis) n'existent plus.

En résumé, toutes les relations, qui traduisent des correspondances physiques instantanées entre des variables du réseau restent valables, et par contre les correspondances qui se font avec une intégration temporelle n'ont plus le même type d'expression.

Les relations (III.18) et (III.18bis) étant maintenant remplacées par des relations dynamiques du type (II.13), on peut, à condition d'utiliser un schéma d'intégration explicite en temps, s'affranchir de la relation implicite débit-température que l'on subissait en régime stationnaire. Ceci va changer notre démarche de calcul sur le réseau par rapport à celle exposée précédemment.

II.2. Variables d'état du problème - Principes généraux de calcul de ces variables

La donnée des variables d'état du problème, à une date t , doit pouvoir résumer entièrement à cette date t l'état du système, et la connaissance de la dynamique de ces variables doit permettre de déterminer parfaitement l'évolution du système pour des dates ultérieures $t' > t$.

Nous reviendrons ultérieurement plus en détail sur le choix des variables d'états du problème, mais nous allons faire quelques remarques sur la manière de mener les calculs en dynamique.

Les températures et les débits sont liés implicitement dans le réseau à cause d'une part du terme de vitesse apparaissant dans l'équation de transport, d'autre part des relations du type (II.3) qui sont une conséquence de l'action des vannes de régulation aux sous-stations. Ce bouclage ne permet pas de donner des expressions analytiques simples de ces températures (nous verrons que cela est possible dans le cas

simple d'un réseau à une chaufferie et une sous-station et on écrira cette solution).

Par contre on peut envisager de calculer les températures de manière approchée grâce à des schémas numériques. En discrétisant le problème en espace et en temps, et en choisissant des schémas numériques explicites (c'est à dire sans relations implicites entre variables d'une même date), on peut déboucler les relations implicites températures-débits.

Le principe de calcul consiste à dire qu'à chaque pas de temps t , on suppose connus tous les débits dans le réseau. Cela nous permet alors une intégration dans l'espace des températures à travers le réseau pour ce pas de temps, les calculs pouvant se mener dans le sens de parcours physique du fluide dans les canalisations. Toutes les relations instantanées qui ont été décrites dans le cas du régime stationnaire et qui restent valables, permettent de propager dans l'espace le calcul des autres variables.

A partir de la connaissance de nouvelles températures à l'entrée des échangeurs, on peut réactualiser le calcul des débits.

Ainsi contrairement à ce qui se passait en calcul statique, on ne déboucle pas les calculs en déplaçant les commandes aux noeuds feuilles, en les multipliant si nécessaire, mais on joue plutôt sur un autre degré de liberté que possède ce problème, c'est à dire la dimension temporelle.

On peut dire aussi en remarque que les schémas numériques qui sont utilisés introduisent souvent des phénomènes de diffusion numérique (on verra plus loin en détail leur signification), qui se propagent dans le sens de l'intégration dans le temps et l'espace. Il est donc aussi meilleur pour cette raison de propager des calculs dans le sens réel de parcours du fluide, la diffusion numérique pouvant éventuellement remplacer un phénomène physique (qu'on a négligé dans l'équation de transport).

A contrario, faire évoluer les calculs en sens rétrograde par rapport à l'espace, c'est aussi violer la causalité en temps ce qui comporte un certain nombre d'inconvénients (il faut pouvoir respecter des conditions initiales), surtout en présence de diffusion numérique (qui peut être source d'irréversibilité).

CHAPITRE IV

ANALYSE DE L'EQUATION D'EVOLUTION DES TEMPERATURES
DANS UNE CANALISATION

Dans ce chapitre nous étudions l'équation d'évolution des températures dans une canalisation. Nous rappelons des résultats généraux d'analyse des équations aux dérivées partielles (condition initiale, condition aux limites, recherche de solutions exacte ou approchées). Pour notre problème nous exhibons une solution exacte, nous étudions plusieurs solutions approchées et soulignons leurs particularités. Nous ne considérons qu'au chapitre suivant comment la résolution de cette équation de transport se propage d'une canalisation à la suivante.

I. Une équation hyperbolique non linéaire

Nous avons vu au chapitre II que l'évolution des températures dans une canalisation est régie par l'équation de transport (II.13), et que pour notre étude nous avons besoin de résoudre cette équation sur un domaine temporel $[0, T_f]$, sur une longueur de canalisation $[0, L]$.

On se pose donc le problème suivant:

Soit $\Omega = [0, L] \subset \mathbf{R}$, $\Gamma = \{0\} \subset \mathbf{R}$, on pose:

$$\mathbf{D} = \Omega \times [0, T_f] \quad \Sigma = \Gamma \times [0, T_f]$$

Etant donnée une fonction $T(x, 0) = T_0 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ et une fonction $g : [0, T_f] \rightarrow \mathbf{R}$ on souhaite calculer une fonction $T(x, t) : (x, t) \in \mathbf{D} \rightarrow T(x, t) \in \mathbf{R}$ solution de

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + w(t) \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -\lambda \cdot (T(x, t) - \theta_0) \quad (\text{II.13})$$

sachant que $w(t) = \alpha Q(t) = \alpha \Phi(T(L, t), t)$ où Φ est une fonction régulière, strictement positive

$$= f(T(L, t)),$$

que $w(t) \geq a > 0$ et $w(t)$ borné (*)

$$\lambda > 0;$$

et vérifiant la condition aux limites:

$$T = g \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.33})$$

et la condition initiale:

$$T(., 0) = T_0(.) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV.34})$$

(*) Si on considère la Figure 6 du chapitre II, on comprend que puisqu'on a une limite maximum sur le niveau des températures (fonction de la puissance de la chaufferie), on a donc un débit résultant positif strictement, supérieur à une valeur Q_{\min} , c'est ce qui donne la condition sur $w(t) \geq a > 0$.

D'autre part on sait que pour des températures trop faibles en dessous de l'asymptote de la courbe température-débit, on ne peut plus trouver de débit permettant de satisfaire la demande à la sous-station, et de plus un débit trop important dans le réseau n'a pas de sens physique, c'est pourquoi on limite le débit à une valeur maximum Q_{\max} , qui nous permet de dire que $w(t)$ est bornée.

I.1. Remarque sur la signification physique des conditions initiales et aux limites

- Condition initiale en t_0 (IV-34): la fonction $T(x, 0)$ représente, à la date $t = 0$ initiale, un profil des températures le long de la canalisation.
- Condition aux limites en $x=0$: se donner la fonction $g(t)$ revient à se donner la fonction $T(0,t)$, c'est à dire l'évolution au cours du temps de la température à l'abscisse au début de la canalisation.

Pour la canalisation partant de la chaufferie, cette fonction $T(0,t)$ représente la température au départ de la chaufferie, qui est la commande en température du réseau.

Pour une canalisation partant de la sous-station k , cette fonction $T(0,t)$ représente la fonction température à l'entrée de la canalisation k ou la température à la fin de la canalisation amont $k-1$ ou la température à l'entrée de l'échangeur k .

I.2. Le bouclage par le débit rend l'équation non linéaire

- Rappelons l'écriture d'une équation hyperbolique linéaire:

$$a_1(x,t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + a_2(x,t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = b(x,t)$$

- Rappelons l'écriture d'une équation hyperbolique quasi linéaire:

$$a_1(x,t,T(x,t)) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + a_2(x,t,T(x,t)) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = b(x,t,T(x,t))$$

- L'équation (II.13) n'entre pas exactement dans les catégories d'équation hyperbolique linéaire ou quasi-linéaire bien qu'étant peu différente. C'est une *équation non linéaire*, car le terme $w(t)$ est une fonction non linéaire de la température $T(x,t)$ pour une abscisse particulière L , correspondant à l'extrémité d'une canalisation ou à l'entrée dans une sous-station ($w(t) = \alpha Q(t) = \alpha \Phi(T(L,t), W(t))$). On n'a pas comme dans le cas de l'équation quasi-linéaire une fonction a_2 dépendant localement de la fonction $T(x,t)$ mais de la fonction $T(L,t)$. Cette relation est la relation (II.3) qui lie débit et température à l'entrée de l'échangeur.

1.3. Changement de variable

Moyennant un changement de variable très simple $\tilde{T}(x,t) \rightarrow (T(x,t) - \theta_0) \cdot e^{\lambda t}$ on obtient l'équation hyperbolique sans second membre suivante (IV.35), que nous allons maintenant étudier plus en détail:

$$\frac{\partial \tilde{T}(x,t)}{\partial t} + w(t) \cdot \frac{\partial \tilde{T}(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.35})$$

$$w(t) = f(\tilde{T}(L,t)e^{-\lambda t} + \theta_0) \quad \text{avec } f \text{ fonction régulière, strictement positive}$$

avec la condition aux limites:

$$\tilde{T} = (g - \theta_0) e^{-\lambda t} \quad \text{sur } \Sigma \quad (\text{IV.36})$$

et la condition initiale:

$$T(.,0) = T_0(.) - \theta_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{IV.37})$$

Maintenant que nous avons défini notre problème nous allons rappeler les propriétés de cette équation, décrire les manières de la résoudre.

A partir de maintenant, pour étudier de manière générale l'équation de transport proposée, nous utilisons le terme générique u pour nommer la fonction vérifiant (IV.35), ϕ pour la fonction initiale (IV.37) et h pour la fonction condition aux limites (IV.36).

II. Classes des fonctions

On doit avant d'étudier l'existence d'une solution u à l'équation (IV.35) se définir la classe des fonctions initiales ϕ et aux limites h .

Nous nous intéressons à l'étude du comportement du réseau pour des variations instantanées de tarif électrique, pour des variations très raides de demandes aux sous-stations et on peut imaginer que la commande en température du réseau puisse avoir elle aussi des fronts très raides pour répondre à ces variations. C'est pourquoi nous avons choisi de chercher des classes de commande h de type $L^2([0, T_d])$ et des classes de condition initiale ϕ de type $L^2([0, L])$.

On peut dès maintenant faire une remarque: une des commandes du système est la courbe de température, qui constitue la condition aux limites pour la première canalisation du réseau. A partir de cette commande, on va calculer les variables d'états du système, dont certaines sont les températures dans le réseau $T(x, t)$, en intégrant l'équation de transport; on ne gagne aucune régularité sur les fonctions $T(x, t)$ par rapport à la fonction commande par cette intégration (contrairement au cas des systèmes régis par des équations différentielles du type $\dot{x} = f(x, u)$ où u est la commande et x l'état.).

III. Courbes caractéristiques

L' équation hyperbolique sans second membre admet des courbes caractéristiques le long desquelles la solution est constante, égale à sa valeur en un point connu de la caractéristique.

Soit la courbe caractéristique $t \rightarrow X(t)$, définie telle que $\frac{dX}{dt} = w(t)$ avec $w(t) \in L^2([0, T_f])$ et vérifiant la condition initiale $X(s)=x$.

$$\text{On a } X(t,x,s) = x + \int_s^t w(r) \cdot dr$$

Cette courbe caractéristique existe et est unique, on la note $X(t,x,s)$ pour rendre explicite la dépendance par rapport aux conditions initiales: $X(s)=x$.

- La caractéristique $X(t,x^*,0)$ est la caractéristique coupant l'axe des $t=0$ en x^* elle part donc d'un point de la courbe de condition initiale.
- La caractéristique $X(t,0, t^*)$ est la caractéristique coupant l'axe des $x=0$ en t^* elle part donc d'un point de la courbe des conditions aux limites.

Sur une caractéristique ainsi définie la fonction $u : t \rightarrow u(X(t),t)$ vérifie:

$$\frac{du(X(t),t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot w(t) + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Toute solution u de l'équation (IV-35), est constante le long de chaque caractéristique et on obtient:

$$u(X(t,x,s),t) = u(x,s)$$

Remarque:

Pour revenir au problème physique de propagation des températures cela signifie que la température $\tilde{T}(x,t)$ se translate au cours du temps avec une vitesse $w(t)$ à travers la canalisation sans se déformer. La température réelle à travers la canalisation $T(x,t)$ subit une atténuation exponentielle, due aux pertes thermiques et on obtient:

$$T(X(t,x,s),t) = T(x,s) e^{-\lambda (t-s)} + \theta_0 (1 - e^{-\lambda (t-s)})$$

IV Etude de l'équation exacte

On peut renormaliser le problème et chercher u pour $x \in [0,1]$, $t \in [0,A]$, A quelconque.

On écrit l'équation sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + f(u(x,t)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 & 0 < a \leq f < M \text{ régulière} \\ \text{C.L. : } u(0,t) = h(t) & t \geq 0 \quad \|h\|_{\infty} < +\infty \\ \text{C.L. : } u(x,0) = \phi(x) & 0 \leq x < 1 \quad \|\phi\|_{\infty} < +\infty \end{array} \right. \quad (1)$$

Nous cherchons à montrer qu'il est possible de trouver une fonction u de type $C([0,1], L^2_{loc}([0,\infty))) \cap C([0,\infty], L^2([0,1]))$ solution faible de l'équation (IV.35) et satisfaisant les conditions aux limites (IV.36) et (IV.37) pour des fonctions h de type $L^2_{loc}([0,\infty])$ et ϕ de type $L^2([0,1])$. Nous allons en donner une expression analytique.

Pour cela nous allons procéder en plusieurs étapes que nous décrivons maintenant rapidement:

- Nous définirons l'expression analytique d'une fonction u de type $C([0,1], L^2_{loc}([0,\infty))) \cap C([0,\infty], L^2([0,1]))$, nous lui imposerons une condition initiale ϕ de type $L^2([0,1])$ et une condition aux limites h de type $L^2([0,\infty])$. Nous devrons déjà montrer que l'expression analytique donnée a un sens et qu'elle peut définir une fonction u . Pour cela

Nous définirons la même expression analytique d'une fonction régulière $u^a \in C^{\infty}$ (ou C^1), nous lui imposerons une condition initiale régulière ϕ_a et une condition aux limites régulière h_a . Nous montrerons que l'expression analytique a un sens et qu'elle définit bien une fonction u_a . Nous montrerons que cette fonction u_a est solution forte du problème (1).

Nous prendrons une suite de fonctions initiales régulières ϕ_a convergeant vers la condition initiale imposée ϕ à la fonction u . Nous prendrons une suite de fonctions aux limites régulières h_a convergeant vers la condition aux limites imposée h à u . Nous définirons une suite de fonctions régulières u_a par l'expression analytique et la donnée de ϕ_a et de h_a . Nous montrerons que cette suite de fonctions converge vers la fonction u et nous donnerons un sens à l'expression analytique donnée au départ pour u .

- Nous montrerons que la fonction u est une solution faible du problème de départ.
- Nous montrerons l'unicité de la solution u dans le cas où elle est régulière C^{∞} (ou C^1).
- Nous aborderons le problème de la commandabilité du système régi par cette équation.

IV.1. Calcul d'une solution de (IV (1))

On veut montrer que la définition (2) a un sens et qu'elle définit une fonction $u(x,t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} * u \in C([0,1], L^2_{\text{loc}}([0,\infty])) \cap C([0,\infty[, L^2([0,1])) \\ * u(x,t) = \phi(x-F(t)) \quad \text{pour } F(t) \leq x \\ * u(x,t) = h(F^{-1}(F(t)-x)) \quad \text{pour } F(t) > x \\ \text{avec } F(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \text{ et } w(t) = f(u(1,t)) \\ \text{avec } \|h\|_{\infty} < +\infty \\ \text{avec } \|\phi\|_{\infty} < +\infty \end{array} \right. \quad (2)$$

IV.1.1. Existence et construction d'une fonction régulière u_a

Dans toute cette partie n est fixé, correspondant à des conditions aux bords h_a et ϕ_a régulières.

Soit le problème (1) réécrit, pour des conditions initiales régulières:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} + f(u_a(1,t)) \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial x} = 0 \quad 0 < a \leq f < M \text{ régulière} \\ \text{C.L.: } u_a(0,t) = h_a(t) \quad t \geq 0 \quad \|h_a\|_{\infty} < +\infty \quad h_a \in C^\infty \text{ (ou } C^1) \\ \text{C.I.: } u_a(x,0) = \phi_a(x) \quad 0 \leq x < 1 \quad \|\phi_a\|_{\infty} < +\infty \quad \phi_a \in C^\infty \text{ (ou } C^1) \end{array} \right. \quad (1\text{bis})$$

On impose aussi la condition de compatibilité suivante:

$$h_a(0) = \phi_a(0)$$

On veut montrer que la définition (2bis) suivante a un sens et qu'elle définit une fonction $u_a(x,t)$, qui est solution forte de (1bis).

$$\left\{ \begin{array}{l} * u_a(x,t) = \phi_a(x-F_a(t)) \quad \text{pour } F_a(t) \leq x \\ * u_a(x,t) = h_a(F_a^{-1}(F_a(t)-x)) \quad \text{pour } F_a(t) > x \\ \text{avec } F_a(t) = \int_0^t w_a(\tau) d\tau \text{ et } w_a(t) = f(u_a(1,t)) \end{array} \right. \quad (2\text{bis})$$

Construction d'une solution C^∞ (ou C^1)

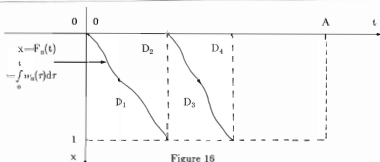


Figure 16

Construction d'un domaine (D_1) :

- Définissons $F_a(t)$ comme solution de l'équation différentielle suivante:

$$F_a'(t) = f \circ \phi_a(1-F_a(t)) \text{ avec } F_a(0) = 0 \text{ sur le domaine } \begin{cases} t \text{ tel que } 0 \leq F_a(t) < 1 \\ \text{ou } t \in [0, t_1] \text{ avec } t_1 \geq \tau \geq 0 \text{ tel que} \\ \forall s \in [0, \tau] \quad 0 \leq F_a(s) \leq 1 \end{cases}$$

Utilisons le théorème de Cauchy - Lipschitz - Picard:

$F_a(t)$ existe, car ϕ_a est C^1 f est régulière et bornée. ϕ_a est C^∞ (ou C^1), f est C^∞ (ou C^1) donc la fonction $f \circ \phi_a$ est C^1 .

Pour $t \in [0, t_1]$, la solution $F_a(t)$ est C^∞ (ou C^1) et avec la condition $F_a(0) = 0$, la solution est définie de manière unique par:

$$F_a(t) = \int_0^t f \circ \phi_a(1-F_a(r))dr = \int_0^t w_a(r)dr \text{ en posant } f \circ \phi_a(1-F_a(t)) = w_a(t)$$

$F_a(t)$ est positive, strictement croissante, continue, donc inversible. On peut définir t_1 tel que $F_a(t_1) = 1$.

- On définit le domaine D_1 :

$$D_1 = \begin{cases} * x \in [0, 1] \\ * t \in [0, t_1] \text{ avec } t \text{ tel que } 0 \leq F_a(t) \leq x \\ t_1 \text{ est défini par } F_a(t_1) = 1 \\ w_a(t) = f \circ \phi_a(1-F_a(t)) \end{cases}$$

- Sur le domaine D_1 nous définissons $u_a(x,t)$ par:

$$u_a(x,t) = \phi_a(x - F_a(t))$$

u_a est la composée de fonctions C^∞ (ou C^1), est C^∞ (ou C^1) et $u_a(x,t)$ sur D_1 est solution forte de (1bis) car elle vérifie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} + f(u_a(1,t)) \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial x} &= \phi_a'(x - F_a(t)) F_a'(t) + f(u_a(1,t)) \phi_a'(x - F_a(t)) \\ &= \phi_a'(x - F_a(t)) (-F_a'(t) + f(\phi_a(1 - F_a(t)))) = 0 \end{aligned}$$

Construction d'un domaine (D_2):

$$D_2 \left\{ \begin{array}{l} * x \in [0,1] \\ * t \in [0,t_1] \text{ avec } t \text{ tel que } F_a(t) \geq x \\ t_1 \text{ est défini par } F_a(t_1) = 1 \\ w_a(t) \text{ étant défini comme précédemment} \end{array} \right.$$

- Sur ce domaine D_2 on a $0 \leq F_a(t) \leq x \leq 1$. Pour $t \in [0,t_1]$, $F_a(t)$ est une fonction croissante et continue, prenant ses valeurs sur $[0,1]$, donc $F_a^{-1}(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$ et prend ses valeurs sur $[0,t_1]$.
- Sur le domaine D_2 nous définissons $u_a(x,t)$ par:

$$u_a(x,t) = h_a(F_a^{-1}(F_a(t) - x)).$$

Cette définition a bien un sens, et comme on vient de le voir u_a étant une composée de fonctions C^∞ (ou C^1), est C^∞ (C^1), et est une solution forte de (1bis) car elle vérifie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial t} + f(u_a(1,t)) \frac{\partial u_a(x,t)}{\partial x} &= \\ h_a(F_a^{-1}(F_a(t) - x)) (F_a^{-1})'(F_a(t) - x) F_a'(t) + F_a'(t) h_a(F_a^{-1}(F_a(t) - x)) (F_a^{-1})'(F_a(t) - x) &= 0 \end{aligned}$$

Sur la zone frontière où $F_a(t) = x$, on trouve $u_a(x,t) = h_a(0) = \phi_a(0)$, on a donc continuité entre les deux domaines, et sur chacun des domaines D_1 et D_2 la fonction u_a étant régulière, u_a est solution forte sur $D_1 \cup D_2$.

Construction du domaine (D₃):

Nous calquons la construction de ce domaine sur la construction du domaine D₁ puisque le profil u_n(., t₁) peut jouer le même rôle que le profil de départ φ_n(.) pour définir tout d'abord une équation différentielle, écrire sa solution, puis définir la fonction w_n(t) et donner une expression de u_n(x, t) sur D₃.

- Définissons G_n(t) comme solution de l'équation différentielle suivante:

$$G_n'(t) = f \circ u_n(1 - G_n(t), t_1) \text{ avec } G_n(t_1) = 0 \text{ sur le domaine } \begin{cases} t \text{ tel que } 0 \leq G_n(t) < 1 \\ \text{ou } t \in [t_1, t_2] \text{ avec } t_2 \geq \tau \geq t_1 \text{ tel que} \\ \forall s \in [t_1, \tau] \quad 0 \leq G_n(s) \leq 1 \end{cases}$$

Pour t ∈ [t₁, t₂], la solution G_n(t) existe et avec la condition G_n(t₁) = 0, la solution est définie de manière unique par:

$$G_n(t) = \int_{t_1}^t f \circ u_n(1 - G_n(\tau), \tau) d\tau = \int_{t_1}^t w_n(\tau) d\tau$$

en posant $w_n(t) = f \circ u_n(1 - G_n(t), t_1) = f \circ h_n(F_n^{-1}(F_n(t_1) - 1 + G_n(t)))$

On peut définir t₂ tel que G_n(t₂) = 1.

En t₁, on a la même définition de w_n que ce soit sur D₁ ou D₃.

- On définit le domaine D₃:

$$D_3 = \begin{cases} * x \in [0, 1] \\ * t \in [t_1, t_2] \text{ avec } t \text{ tel que } 0 \leq G_n(t) \leq x \\ t_2 \text{ est défini par } G_n(t_2) = 1 \\ w_n(t) = f \circ u_n(1 - G_n(t), t_1) \end{cases}$$

- Sur le domaine D₃ nous définissons u_n(x, t) par:

$$u_n(x, t) = u_n(x - G_n(t), t_1) = h_n(F_n^{-1}(F_n(t_1) - x + G_n(t)))$$

- Elargissons la définition de F_n(t) sur D₃ pour avoir une notation unique de u_n sur D₂ et D₃:

Sur [0, t₁], on a F_n(t) = F_n(t) et w_n(t) = f ∘ φ_n(1 - F_n(t))

Sur [t₁, t₂], posons F_n(t) = F_n(t₁) + G_n(t) et on a w_n(t) = f ∘ h_n(F_n⁻¹(F_n(t₁) - 1 + G_n(t)))

Sur D₃, on a F_n(t) = x + G_n(t) ∈ [0, 1], donc on peut calculer F_n⁻¹(F_n(t₁) - x + G_n(t)) avec F_n⁻¹ inverse de F_n sur [0, 1] qui existe.

On peut écrire sur D₃, w_n(t) et u_n(x, t) sous les formes suivantes:

$$w_n(t) = f \circ h_n(F_n^{-1}(F_n(t) - 1))$$

$$u_n(x, t) = h_n(F_n^{-1}(F_n(t) - x))$$

u_0 est une composée de fonctions C^∞ (ou C^1), donc est C^∞ (ou C^1) et est une solution forte de (1bis) car elle vérifie:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + f(u_n(1,t)) \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0$$

On a continuité de la fonction u_n en $t = t_1$ par sa définition, donc la solution u_n est solution forte de (1bis) sur tout le domaine $D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

On peut construire maintenant un domaine D_4 sur le modèle de D_2 et ainsi de suite de proche en proche définir $u_n(x,t)$ sur tout le domaine $[0,1] \times [0,A]$.

Ainsi de proche en proche on a pu construire les domaines D_1, D_2, D_3, \dots , qui permettent de définir $u_n(x,t)$ comme fonction C^∞ (ou C^1) de la manière suivante:

$$\begin{cases} u_n(x,t) = \phi_n(x - F_n(t)) & \text{pour } F_n(t) \leq x & (D_1) \\ u_n(x,t) = h_n(F_n^{-1}(F_n(t) - x)) & \text{pour } F_n(t) \geq x & (D_2, D_3, \dots) \\ \text{avec } F_n(t) = \int_0^t w_n(r) dr & \text{et } w_n(t) = f(u_n(1,t)) \end{cases}$$

IV.1.2. Passage à la limite sur les conditions aux bords

On a montré que pour des C.I. et des C.L. régulières $h_n \in C^\infty$ (ou C^1), $\phi_n \in C^\infty$ (ou C^1), et la condition de compatibilité $h_n(0) = \phi_n(0)$, on peut définir une fonction $u_n \in C^\infty$ (ou C^1), ($w_n \in C^\infty$ (ou C^1)) par l'écriture analytique donnée en (2bis) et on a montré que la fonction ainsi définie est solution forte de (1bis).

Prenons deux suites de fonctions $h_n, \phi_n \in C^0$ (C^1) ($h_n(0) = \phi_n(0)$) telles que:

$$h_n \rightarrow h \in L^2[0,A] \text{ (ou } L^1[0,A]) \text{ avec } \|h_n\|_\infty \leq \|h\|_\infty < +\infty \text{ par définition}$$

$$\phi_n \rightarrow \phi \in L^2[0,1] \text{ (ou } L^1[0,1]) \text{ avec } \|\phi_n\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty < +\infty \text{ par définition}$$

$$\text{On a } \|u_n\|_\infty \leq \|\phi_n\|_\infty + \|\phi\|_\infty \text{ donc } \|w_n\|_\infty \leq C$$

• On peut extraire une sous-suite w_{n_k} que nous continuons à noter w_n convergeant vers w dans L^∞ faible*, c'est-à-dire telle que:

$$\left| \int w_n \Theta - \int w \Theta \right| \rightarrow 0 \quad \forall \Theta \in L^1([0,A])$$

On a désormais utiliser cette limite $w \in L^\infty$ pour se définir une fonction $u(x,t)$ de la manière suivante (Remarque: w_n est strictement positif, supérieur à a ($a \geq a > 0$), donc par passage à la limite w l'est aussi):

$$\begin{cases} u(x,t) = \phi(x-F(t)) & \text{si } F(t) \leq x & \text{et } x \in [0,1] & t \in [0,t_1] \\ u(x,t) = h(F^{-1}(F(t)-x)) & \text{si } F(t) > x & \text{avec } F(t) = \int_0^t w(r)dr & \text{et } x \in [0,1] & t \in [0,A] \end{cases}$$

w est borné sur $[0,A]$ donc intégrable sur $[0,A]$.

w est strictement positif donc $F(t)$ est une fonction continue, croissante strictement sur $[0,A]$, donc est inversible et l'expression $F^{-1}(F(t)-x)$ a un sens.

- Montrons que la suite u_n converge uniformément vers u dans $C([0,1], L^2([0,A]))$, $A > t_1$.

$$* \|u\| = \sup_{x \in [0,1]} \left(\int_0^A u^2(x,t) dt \right)^{1/2} \text{ dans } C([0,1], L^2([0,A]))$$

$$* u \in C([0,1], L^2([0,A])) : u(x, \cdot) \in L^2([0,A])$$

$$\forall x, \text{ si } x \rightarrow x_0 \quad u(x, \cdot) \rightarrow u(x_0, \cdot) \text{ en norme } L^2([0,A])$$

$$\|u(x, \cdot) - u(x_0, \cdot)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow x_0$$

$$* u_n \text{ converge vers } u \text{ dans } C([0,1], L^2([0,A])) \text{ signifie:}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tq pour } n > N \text{ on ait } \sup_{x \in [0,1]} \int_0^A |u_n(x,t) - u(x,t)|^2 dt < \epsilon$$

a - montrons que T_n converge uniformément vers T sur $[0,1]$, c'est à dire:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n > N, \forall x \in [0,1] \quad |T_n(x) - T(x)| < \epsilon$$

$$\begin{cases} T_n(x) \text{ est défini par } F_n(T_n(x)) = \int_0^{T_n(x)} w_n(r) dr = x \\ T(x) \text{ est défini par } F(T(x)) = \int_0^{T(x)} w(r) dr = x \end{cases}$$

Soit une suite (x_n) convergeant vers x quelconque $\in [0,1]$.

$w_n \geq a \geq 0$ donc $T_n(x_n)$ est borné, on peut en extraire une sous-suite $T_{n_k}(x_{n_k})$ convergeant vers r .

$$\text{A-t-on } r = T(x) \text{ c'est-à-dire } \int_0^r w(t) dt = x ?$$

$$\int_0^{T_n(x_n)} w_n(t) dt = \int_0^r w_n(t) dt + \int_r^{T_n(x_n)} w_n(t) dt$$

$$* \int_0^r w_n(t) dt \rightarrow \int_0^r w(t) dt \text{ car } w_n \text{ converge faiblement vers } w \text{ dans } L^\infty \text{ faible} *$$

$$* \quad \left| \int_r^{T(x)} w_n(t) dt \right| \leq \left| T_n(x_n) - r \right| \|w_n\|_{L^\infty([0,A])}$$

$$\leq C \left| T_n(x_n) - r \right| \rightarrow 0 \text{ par définition de } r$$

$$\text{donc } \left| \int_0^{T(x)} w_n(t) dt - \int_0^r w(t) dt \right| < \epsilon \Rightarrow \left| x - \int_0^r w(t) dt \right| < \epsilon \Rightarrow r = T(x)$$

$$\text{et } \forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } n > N \quad \forall x \in [0,1] \quad T_n(x) \in [T(x) - \epsilon, T(x) + \epsilon]$$

$$b - \forall x \in [0,1] \text{ étudions } \int_0^A \left| u_n(x,t) - u(x,t) \right|^2 dt$$

$$\int_0^A \left| u_n(x,t) - u(x,t) \right|^2 dt \leq \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi_n(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w(r) dr) \right|^2 dt \quad (I)$$

$$+ \int_{T(x)+\epsilon}^A \left| h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F^{-1}(F(t)-x)) \right|^2 dt \quad (J)$$

$$+ \int_{T(x)-\epsilon}^{T(x)+\epsilon} \left| u_n(x,t) - u(x,t) \right|^2 dt \quad (K)$$

$$\begin{aligned} \square \quad K &= \int_{T(x)-\epsilon}^{T(x)+\epsilon} \left| u_n(x,t) - u(x,t) \right|^2 dt \\ &= \int_{T(x)-\epsilon}^{T(x)} \left| u_n(x,t) - \phi(x - \int_0^t w(r) dr) \right|^2 dt + \int_{T(x)}^{T(x)+\epsilon} \left| u_n(x,t) - h(F^{-1}(F(t)-x)) \right|^2 dt \\ &\leq 2 \epsilon (2 \|u_n\|_\infty^2 + \|\phi\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2) \leq C_1 \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square \quad I &= \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi_n(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w(r) dr) \right|^2 dt \\ &= \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi_n(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w_n(r) dr) + \phi(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w(r) dr) \right|^2 dt \\ &\leq C_2 \left\{ \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi_n(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w_n(r) dr) \right|^2 dt \right. \quad (I1) \end{aligned}$$

$$\left. + \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w(r) dr) \right|^2 dt \right\} \quad (I2)$$

$$* \quad I1 = \int_0^{T(x)-\epsilon} \left| \phi_n(x - \int_0^t w_n(r) dr) - \phi(x - \int_0^t w_n(r) dr) \right|^2 dt$$

$\forall x \in [0,1]$ on fait le changement de variable $\alpha = x - \int_0^t w_s(r)dr = x - F_s(t)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \text{ quand } t=0 & \alpha_1 = x \quad \text{et } 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \\ \bullet \text{ quand } t=T(x) & \alpha_2 = x - \int_0^{T(x)-\epsilon} w_s(r)dr \quad \text{et } 0 \leq \alpha_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

$$I1 = \int_x^{x - \int_0^{T(x)-\epsilon} w_s(r)dr} \frac{1}{w_s(F_s^{-1}(x-\alpha))} |\phi_s(\alpha) - \phi(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$|I1| \leq \int_0^1 \frac{1}{w_0(F_0^{-1}(x-\alpha))} |\phi_s(\alpha) - \phi(\alpha)|^2 d\alpha$$

$\leq a_1 \epsilon$ (pour n assez grand, ce que nous supposons toujours par la suite)

car $w_s(F_s^{-1}(x-\alpha))$ est borné et ϕ_s converge vers ϕ dans $L^2([0,1])$.

$$\bullet \quad I2 = \int_0^{T(x)-\epsilon} |\phi(x - \int_0^t w_s(r)dr) - \phi(x - \int_0^t w(r)dr)|^2 dt$$

Prenons une suite $\phi_{ik} \in C_c^\infty([0,1])$ qui converge vers ϕ dans $L^2([0,1])$.

Remarque: cette suite existe car $C_c^\infty([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$.

$$I2 \leq b_1 \left\{ \int_0^{T(x)-\epsilon} |\phi(x - \int_0^t w_s(r)dr) - \phi_{ik}(x - \int_0^t w_s(r)dr)|^2 dt \right. \quad (I2.1)$$

$$+ \int_0^{T(x)-\epsilon} |\phi_{ik}(x - \int_0^t w_s(r)dr) - \phi_{ik}(x - \int_0^t w(r)dr)|^2 dt \quad (I2.2)$$

$$\left. + \int_0^{T(x)-\epsilon} |\phi_{ik}(x - \int_0^t w(r)dr) - \phi(x - \int_0^t w(r)dr)|^2 dt \right\} \quad (I2.3)$$

$$\bullet \quad I2.1 \leq \int_0^1 \frac{1}{w_0(F_0^{-1}(x-\alpha))} |\phi(\alpha) - \phi_{ik}(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$|I2.1| \leq \alpha_1 \epsilon$$

En effet d'une part ϕ_{ik} converge vers ϕ dans $L^2([0,1])$ donc on peut choisir k de sorte que $\int_0^1 |\phi(\alpha) - \phi_{ik}(\alpha)|^2 d\alpha < \epsilon$ (k est désormais fixé), et d'autre part $w_s(F_s^{-1}(x-\alpha))$ est borné.

$$\bullet \quad I2.2 \leq \alpha_2 \|\phi_{ik}\|_\infty \int_0^A \int_0^t w_s(r) |w(r)dr| dt$$

$$\leq \alpha_2 \|\phi_{ik}\|_\infty A \epsilon$$

w_n converge vers w dans L^∞ faible *.

$$\begin{aligned} \text{donc } \forall t : F_n(t) - F(t) &= \int_0^t (w_n(r) - w(r)) dr \\ &= \int_0^A w_n \Xi_{[0,t]} dr - \int_0^A w \Xi_{[0,t]} dr \rightarrow 0 \end{aligned}$$

- Partageons $[0, A]$ en $k-1$ segments de largeur A/k .

$$\forall t \in [0, A], \exists i \text{ tel que } t \in [\frac{i}{k} A, \frac{i+1}{k} A]$$

$$\epsilon > 0, \exists N, n \geq N \text{ tel que } \forall i \in (0, k) \quad |F_n(\frac{i}{k} A) - F(\frac{i}{k} A)| \leq \epsilon$$

$$\text{Pour } n \geq N \quad |F_n(t) - F(t)| \leq |F_n(\frac{i}{k} A) - F(\frac{i}{k} A)| + |F(\frac{i}{k} A) - F(t)| + |F_n(t) - F_n(\frac{i}{k} A)|$$

$$|F_n(\frac{i}{k} A) - F(\frac{i}{k} A)| \leq \epsilon$$

$$|F(\frac{i}{k} A) - F(t)| \leq C_0 A/k \quad (\|w_n\|_\infty < C_0)$$

$$|F_n(t) - F_n(\frac{i}{k} A)| \leq C_0 A/k$$

On choisit k tel que $2 C_0 A/k \leq \epsilon$

- d'autre part k est fixé et on sait que $\|\phi'_k\|_\infty$ est borné par le choix de la suite ϕ_k .

$$\begin{aligned} \bullet \text{ I2.3} &\leq \int_0^1 |\phi_k(x) - \int_0^t w(r) dr - \phi(x) - \int_0^t w(r) dr|^2 dt \\ &\leq \|\phi_k - \phi\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \epsilon \end{aligned}$$

En effet on a choisi plus haut k tel que ceci soit vérifié.

$$\text{Donc pour tout } x \in [0,1] \quad \text{I2} \leq b_1(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\epsilon = d_1\epsilon$$

$$\text{Donc } \text{I} \leq \text{I1} + \text{I2} \leq (a_1 + d_1)\epsilon$$

$$\begin{aligned} \square \text{ } J &= \int_{T(s)+\epsilon}^A |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F^{-1}(F(t)-x))|^2 dt \\ &\leq C_3 \left\{ \int_{T(s)+\epsilon}^A |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dt \right. \end{aligned} \tag{J1}$$

$$\left. + \int_{T(s)+\epsilon}^A |h(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F^{-1}(F(t)-x))|^2 dt \right\} \tag{J2}$$

$$\bullet \quad J1 = \int_{T(x)+\epsilon}^A |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dt$$

$\forall x \in [0,1]$ on fait le changement de variable $T = F_n^{-1}(F_n(t)-x)$

T est tel que $F_n(T) = F_n(t) - x$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ quand } t = T(x) + \epsilon \quad T \text{ est tel que } F_n(T) = F_n(T(x) + \epsilon) - x \\ \quad \text{on sait que pour } n \text{ grand, } T_n(x) \in [T(x) - \epsilon, T(x) + \epsilon] \text{ et } F_n(T_n(x)) = x \\ \quad \text{donc } 0 \leq F_n(T_n(x)) \leq F(T(x) + \epsilon) \text{ et } T \leq A \\ \bullet \text{ quand } t = A \quad T \text{ est tel que } F_n(T) = F_n(A) - x \text{ d'où } 0 \leq T \leq A \end{array} \right.$$

donc $\forall x \in [0,1]$, pour $t \in [T(x) + \epsilon, A]$ on a $T = F_n^{-1}(F_n(t)-x) \in [0,A]$.

$$\begin{aligned} \text{donc } J1 &= \int_{F_n^{-1}(F_n(T(x)+\epsilon)+x)}^{F_n^{-1}(F_n(A)+x)} |h_n(T)-h(T)|^2 \frac{dT w_n(T)}{w_n(F_n^{-1}(F_n(T)+x))} \\ &\leq \alpha_0 \int_0^A |h_n(T)-h(T)|^2 dt \\ &\leq \alpha_0 \epsilon \end{aligned}$$

En effet h_n converge vers h dans $L^2([0,A])$ et $\frac{w_n(T)}{w_n(F_n^{-1}(F_n(T)+x))}$ est borné.

$$\bullet \quad J2 = \int_{T(x)+\epsilon}^A |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dt$$

Prenons une suite $h_k \in C^\infty([0,1])$ qui converge vers h dans $L^2([0,A])$.

$$J2 \leq 2 \left\{ \int_{T(x)+\epsilon}^A |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h_k(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dt \right. \quad (J2.1)$$

$$+ 2 \int_{T(x)+\epsilon}^A |h_k(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h_k(F_n^{-1}(F(t)-x))|^2 dt \quad (J2.2)$$

$$\left. + 2 \int_{T(x)+\epsilon}^A |h_k(F_n^{-1}(F(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F(t)-x))|^2 dt \right\} \quad (J2.3)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad J2.1 &= \int_{F_n^{-1}(F_n(T(x)+\epsilon)+x)}^{F_n^{-1}(F_n(A)+x)} |h_n(T)-h_k(T)|^2 \frac{w_n(T)}{w_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x))} dT \\ &\leq \alpha_3 \int_0^A |h_n(T) - h_k(T)|^2 dT \end{aligned}$$

$$\leq 2 \alpha_3 \left(\int_0^A |h_n(T) - h(T)|^2 dT + \int_0^A |h(T) - h_{n_k}(T)|^2 dT \right)$$

On choisit k de sorte que: $\int_0^A |h(T) - h_{n_k}(T)|^2 dT \leq \epsilon$ (k est maintenant fixé).

On a: $\int_0^A |h_n(T) - h(T)|^2 dT \leq \alpha_4 \epsilon$ car h_n converge vers h dans $L^2([0,A])$.

$$J2.1 \leq 2\alpha_3(\alpha_4 + 1)\epsilon$$

$$\bullet J2.2 \leq \|h_{n_k}\|_{\infty} \int_{T(x)+\epsilon}^A |F_n^{-1}(F_n(t)-x) - F^{-1}(F(t)-x)|^2 dt$$

$$\leq \alpha_4 \|h_{n_k}\|_{\infty} \epsilon$$

k est fixé, et on sait que $\|h_{n_k}'\|_{\infty}$ est borné par le choix de la suite h_{n_k} .

On sait que w_n converge vers w dans L^∞ faible *, donc F_n converge vers F dans $C([0,A])$ (On l'a montré pour J2.1). En utilisant alors le fait que $f \geq a > 0$, on en déduit facilement que J2.2 converge vers 0 pour $n > N$ uniformément en x de $[0,1]$.

$$\bullet J2.3 \leq \|h_{n_k} - h\|_{L^2([0,A])} \leq \epsilon$$

En effet on a choisi k plus haut qui vérifie ceci.

$$\text{Donc } \forall x \in [0,1] \quad J \leq J1 + J2 \leq (a_2 + b_2) \epsilon$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0,1] \quad K + I + J \leq M \epsilon$$

Conclusion

u_n converge vers u dans $C([0,1], L^2([0,A]))$

d'où $u_n(1,t)$ converge vers $u(1,t)$ dans $L^2([0,A])$

d'où $u(0,t)$ converge vers $h(t)$ dans $L^2([0,A])$

Montrons que $w_n(t) = f(u_n(1,t))$ converge vers $w(t) = f(u(1,t))$

$u_n(1, \cdot)$ converge vers $u(1, \cdot)$ dans $L^2([0,A])$ donc on peut extraire une sous suite $u_{n_k}(1, \cdot)$ convergeant presque partout vers $u(1, \cdot)$

$$\forall \psi \in C^\infty([0,A]) \quad \int_0^A w_n(t) \psi(t) dt = \int_0^A f(u_{n_k}(1,t)) \psi(t) dt$$

$$\int_0^A w_n(t) \psi(t) dt \text{ converge vers } \int_0^A w(t) \psi(t) dt \text{ car } w_n \text{ converge vers } w \text{ dans } L^\infty([0,A]) \text{ faible } *$$

$|f(u_{n_k}(1,t))| \leq C$, et $f(u_{n_k}(1,t))$ converge vers $f(u(1,t))$ presque partout (car $u_{n_k}(1,t)$ converge vers $u(1,t)$ presque partout et f est continue), donc $\int_0^A f(u_{n_k}(1,t)) \psi(t) dt$ converge vers $\int_0^A f(u(1,t)) \psi(t) dt$.

Conclusion: $\forall \psi, \int_0^A w(t) \psi(t) dt = \int_0^A f(u(1,t)) \psi(t) dt$

$$w(t) = f(u(1,t))$$

• Montrons que la suite u_n converge vers u dans $C([0,A], L^2([0,1]))$, $\forall A$

* u_n converge vers u dans $C([0,A], L^2([0,1]))$, $\forall A$ signifie:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n > N \text{ et on ait } \sup_{t \in [0,A]} \int_0^1 |u_n(x,t) - u(x,t)|^2 dx < \epsilon$$

$$\forall t \in [0,A] \text{ étudions } \int_0^1 |u_n(x,t) - u(x,t)|^2 dx$$

Définissons t_1 par $F(t_1) = 1$.

1° cas: $A > t \geq t_1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_n(x,t) - u(x,t)|^2 dx &= \int_0^1 |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F^{-1}(F(t)-x))|^2 dx \\ &\leq 2 \left\{ \int_0^1 |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dx \right. \end{aligned} \quad (I)$$

$$\left. + \int_0^1 |h(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F^{-1}(F(t)-x))|^2 dx \right\} \quad (J)$$

$$* I = \int_0^1 |h_n(F_n^{-1}(F_n(t)-x)) - h(F_n^{-1}(F_n(t)-x))|^2 dx$$

$\forall x \in [0,1]$ on fait le changement de variable $\alpha(x) = F_n^{-1}(F_n(t)-x)$

$$\begin{cases} \bullet \text{ quand } x = 0 & \alpha_1 = t \in [0,A] \\ \bullet \text{ quand } x = 1 & \alpha_2 = F_n^{-1}(F_n(t)-1) \in [0,A] \end{cases}$$

$$I = \int_{F_n^{-1}(F_n(t))}^{F_n^{-1}(F_n(t)-1)} |h_n(\alpha) - h(\alpha)|^2 \frac{1}{w_n(\alpha)} d\alpha$$

$$\leq a \int_0^A |h_n(\alpha) - h(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$\leq \alpha \epsilon \text{ car } h_n \text{ converge vers } h \text{ dans } L^2([0, A])$$

$$* J = \int_0^1 |h(F_n^{-1}(F_n(t) - x)) - h(F^{-1}(F(t) - x))|^2 dx$$

Prenons une suite $h_{n_k} \in C^\infty([0, A])$ qui converge vers h dans $L^2([0, A])$.

$$\begin{aligned} J \leq 2 \left\{ \int_0^1 |h(F_n^{-1}(F_n(t) - x)) - h_{n_k}(F_n^{-1}(F_n(t) - x))|^2 dt \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 |h_{n_k}(F_n^{-1}(F_n(t) - x)) - h_{n_k}(F^{-1}(F(t) - x))|^2 dt \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 |h_{n_k}(F^{-1}(F(t) - x)) - h(F^{-1}(F(t) - x))|^2 dt \right\} \end{aligned}$$

On fait le changement de variable utilisé pour I, et on utilise les mêmes techniques que pour montrer que u_n converge vers u dans $C([0, A], L^2([0, 1]))$

2° cas: $0 \leq t \leq t_1$ (on peut avoir aussi $0 \leq t \leq A < t_1$)

On fait le changement de variable suivant:

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^1 w(r) dr = F(t) \\ x_n(t) = \int_0^1 w_n(r) dr = F_n(t) \end{cases}$$

$$\int_0^1 |u_n(x, t) - u(x, t)|^2 dt \leq C \left\{ \int_0^{x(t)-\epsilon} |h_n(F_n^{-1}(F_n(t) - x)) - h(F^{-1}(F(t) - x))|^2 dx \right. \quad (I)$$

$$\left. + \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi_n(x - F_n(t)) - \phi(x - F(t))|^2 dx \right. \quad (J)$$

$$\left. + \int_{x(t)-\epsilon}^{x(t)+\epsilon} |u_n(x, t) - u(x, t)|^2 dt \right\} \quad (K)$$

$$\square K \leq a_1 \left\{ \int_{x(t)-\epsilon}^{x(t)} |u_n(x, t) - h(F^{-1}(F(t) - x))|^2 dx \right.$$

$$\left. + \int_{x(t)}^{x(t)+\epsilon} |u_n(x, t) - \phi(x - F(t))|^2 dx \right\}$$

$$\leq 2 a_1 \epsilon (2 \|u_n\|_\infty^2 + \|\phi\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^2)$$

$$\leq c_1 \epsilon$$

□ Etude de I

On fait le même changement de variable que dans le 1^{er} cas: $\alpha(x) = F_a^{-1}(F_a(t)-x)$

$$\begin{aligned} \square J &= \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi_a(x - F_a(t)) - \phi(x - F(t))|^2 dx \\ &\leq 2 \left\{ \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi_a(x - F_a(t)) - \phi(x - F_a(t))|^2 dx \right. \end{aligned} \quad (J1)$$

$$\left. + \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi(x - F_a(t)) - \phi(x - F(t))|^2 dx \right\} \quad (J2)$$

$$* J1 = \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi_a(x - F_a(t)) - \phi(x - F_a(t))|^2 dx$$

On fait le changement de variable $\alpha = x - \int_0^t w_a(r)dr = x - F_a(t)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet \text{ quand } x = x(t) + \epsilon & \text{ on a } 0 < \alpha_1 = x(t) + \epsilon - F_a(t) < 1 \\ \bullet \text{ quand } x = 1 & \text{ on a } 0 < \alpha_2 = 1 - F_a(t) < 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} J1 &= \int_{x(t)+\epsilon-F_a(t)}^{1-F_a(t)} |\phi_a(\alpha) - \phi(\alpha)|^2 d\alpha \leq \int_0^1 |\phi_a(\alpha) - \phi(\alpha)|^2 d\alpha \\ &\leq a_3 \epsilon \quad \text{car } \phi_a \text{ converge vers } \phi \text{ dans } L^2([0,1]) \end{aligned}$$

$$* J2 = \int_{x(t)+\epsilon}^1 |\phi(x - F_a(t)) - \phi(x - F(t))|^2 dx$$

On utilise une suite régularisante ϕ_ϵ , et les mêmes techniques que dans la première partie.

Conclusion

u_ϵ converge vers u dans $C([0,A], L^2([0,1]))$

d'où $u(x,0)$ converge vers $\phi(x)$ dans $L^2([0,1])$

IV.1.3. La fonction u est solution faible de (IV (1))

u est solution faible de (IV (1)) si $\forall \phi \in C^\infty([0,1[x[0,A])$ à support compact dans $([0,1[, [0,A])$ on a:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + f(u(1,t)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \phi(x,t) dt dx = 0$$

c'est à dire:

$$\int_{\Omega} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u(1,t)) u \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt dx \quad (1)$$

$$\int_0^1 u(x,0) \phi(x,0) dx - \int_0^A f(u(1,t)) u(0,t) \phi(0,t) dt = 0 \quad \forall \phi \in C^\infty([0,1] \times [0,A])$$

• On a vérifié que la solution $u_n \in C^\infty$ (ou C^1) définie en (IV.1.1) par (2bis) est solution forte de (1), en particulier, on a:

$$\int_{\Omega} \left(u_n \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u_n(1,t)) u_n \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt dx \quad (1')$$

$$- \int_0^1 u_n(x,0) \phi(x,0) dx - \int_0^A f(u_n(1,t)) u_n(0,t) \phi(0,t) dt = 0 \quad \forall \phi$$

Faisons la différence (1)-(1'), et montrons que pour u limite de u_n (1)-(1') est nul donc que (1) est nul.

• u_n converge vers u dans $C([0,1], L_{loc}^2([0,A])) \cap C([0,A], L_{loc}^2([0,1]))$, donc:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} u_n(x,t) \xrightarrow{CV} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} u(x,t)$$

$$\bullet \left| \int_{\Omega} f(u(1,t)) u(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dt dx - \int_{\Omega} f(u_n(1,t)) u_n(x,t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) dt dx \right|$$

$$= \left| \int_{\Omega} \left\{ (u(x,t) - u_n(x,t)) w(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_n(x,t) w(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} - u_n(x,t) w_n(t) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dt dx \right|$$

$$\leq k \left\{ \int_{\Omega} |u - u_n| |w| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dt dx + \int_{\Omega} |u_n| |w_n - w| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dt dx \right\}$$

$$\leq k(C_1 + C_2) \epsilon$$

$$\text{car } \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \text{ est borné, } w_n \text{ converge vers } w, u_n \text{ converge vers } u.$$

$$\bullet \int_0^1 |u(x,0) - u_n(x,0)| \phi(x,0) dx \leq C_3 \epsilon$$

$$\left| \text{car } u_n(\cdot, 0) \rightarrow u(\cdot, 0) \text{ dans } L^2([0,1]) \right|$$

$$\bullet \int_0^A |f(u(1,t)) u(0,t) - f(u_n(1,t)) u_n(0,t)| \phi(0,t) dt \leq C^4 \epsilon$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{car } u_n(0, \cdot) \rightarrow u(0, \cdot) \text{ dans } L^2([0,A]) \\ \text{et } f(u_n(1,t)) \rightarrow f(u(1,t)) \end{array} \right|$$

Donc $u(x,t)$ vérifie (1) donc $u(x,t)$ est solution faible du problème.

Conclusion:

On a donc prouvé l'existence d'une solution faible du problème (1), et exhibé une écriture de cette solution pour:

$$\begin{aligned} \phi &\in L^2(0,1) \\ h &\in L^2([0,A]) \quad \text{et} \quad u \in C([0,1], L^2([0,A])) \cap C([0,A], L^2([0,1])) \end{aligned}$$

IV.1.4. Unicité de la solution régulière u , ϕ et h régulières étant données

Supposons qu'il existe deux solutions $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ associées aux C.I. et C.L. h et ϕ

- Soit $u = u_2 - u_1$

$$u_1 \text{ vérifie } \frac{\partial u_1}{\partial t} + f(u_1(1,t)) \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$u_2 \text{ vérifie } \frac{\partial u_2}{\partial t} + f(u_2(1,t)) \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

- on soustrait (2)-(3)

$$\partial \left(\frac{u_1 - u_2}{\partial t} \right) + f(u_1(1,t)) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \left(f(u_1(1,t)) - f(u_2(1,t)) \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(u_1(1,t)) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(f(u_1(1,t)) - f(u_2(1,t)) \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$$

- On multiplie (1)-(2) par u et on intègre en espace:

$$\int_0^1 \left[u \frac{\partial u}{\partial t} dx + f(u_1(1,t)) u \frac{\partial u}{\partial x} + (f(u_1(1,t)) - f(u_2(1,t))) u \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^1 \frac{u^2}{2} dx \right) = \int_0^1 f(u_1(1,t)) u \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_0^1 (f(u_1(1,t)) - f(u_2(1,t))) u \frac{\partial u_2}{\partial x} dx$$

- f est Lipschitz de constante b , et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ est bornée donc:

$$\left| \int_0^1 (f(u_1(1,t)) - f(u_2(1,t))) u \frac{\partial u_2}{\partial x} dx \right| \leq kb \left| u(1,t) \right| \int_0^1 u^2 dx \quad |^{1/2}$$

$$\text{et } \int_0^1 f(u_1(1,t)) u \frac{\partial u}{\partial x} dx = f(u_1(1,t)) \left(\frac{u^2(1,t)}{2} - \frac{u^2(0,t)}{2} \right)$$

- On obtient:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 u^2 dx \right) \leq \underbrace{f(u(1,t))}_{>a>0} \frac{u^2(1,t)}{2} + kb |u(1,t)| \int_0^1 u^2 dx |^{1/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{on sait} \quad \frac{a}{2} x^2 + c |x,y| \leq My^2 \text{ pour } a > 0 \\ \text{prenons} \quad x = u(1,t) \\ \quad \quad y = \int_0^1 u^2 dx \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 \frac{u^2}{2} dx \right) \leq a x^2 + c |xy| \leq My^2$$

$$\text{posons } g(t) = \int_0^1 u^2 dx$$

$$g(t) \leq M g(t)$$

$$0 \leq g(t) \leq g(0)e^{Mt} = 0 \implies g \equiv 0, \text{ donc } u \equiv 0$$

Conclusion:

On a une unique solution u associée à h et ϕ

IV.2. Accessibilité du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u(1,t)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ avec } w(t) = f(u(1,t)) \\ u(0,t) = h(t) \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(t) \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (4)$$

On a vu que (1) admet une solution $u(x,t)$ qui peut s'écrire sous la forme analytique suivante:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x - F(t)) \quad \text{pour } F(t) \leq x \\ u(x,t) &= h(F^{-1}(F(t) - x)) \quad \text{pour } F(t) \geq x \text{ avec } F(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \end{aligned}$$

1 * cas:

- Soit t_1 défini par $F(t_1) = \int_0^{t_1} w(r)dr = 1$.
- On voudrait s'il est possible de trouver des C.I. et C.L. qui soient compatibles avec la condition:

$$u(x, t_1) = \phi_{t_1}(x) \text{ profil imposé}$$

$$\text{on a: } u(x, t_1) = \phi_{t_1}(x) = h(F^{-1}(F(t_1)-x))$$

$F^{-1}(F(t_1)-x)$ pour $x \in [0, 1]$ est une fonction strictement décroissante de x , prenant ses valeurs dans $[0, t_1]$, donc est inversible.

Faisons le changement de variable: $t = F^{-1}(F(t_1)-x) \Leftrightarrow x = F(t_1) - F(t) = \int_t^{t_1} w(r)dr$.

- Ainsi si on veut le profil $\phi_1(x)$ en t_1 , on doit avoir:

$$\forall t \in [0, t_1] \quad h(t) = \phi_{t_1}(F(t_1)-F(t)) = \phi_{t_1}\left(\int_t^{t_1} w(r)dr\right)$$

2 * cas:

- Pour $t > t_1$, $u(x, t) = h(F^{-1}(F(t)-x))$
- On voudrait savoir s'il est possible de trouver des C.I. et C.L. qui soient compatibles avec la condition:

$$u(x, A) = \phi_A(x) \text{ profil imposé, } A \text{ quelconque.}$$

$\forall A$, $F^{-1}(F(A)-x)$ pour $x \in [0, 1]$ est une fonction strictement décroissante, continue de x , prenant ses valeurs dans $[F^{-1}(F(A)-1) = T, A]$, avec T tel que $\int_0^A w(r)dr = 1 = \int_0^T w(r)dr$.

Donc $F^{-1}(F(A)-x)$ est inversible sur $[T, A]$

$$t = F^{-1}(F(A)-x) \Leftrightarrow x = F(A) - F(t) = \int_t^A w(r)dr.$$

- Ainsi si à une date A quelconque on souhaite imposer un profil $\phi_A(x)$, on doit avoir:

$$\forall t \in [T, A] \quad h(t) = \phi_A(F(A)-F(t)) = \phi_A\left(\int_t^A w(r)dr\right)$$

V. Etude de l'équation approchée

V.1. Rappels généraux sur les méthodes aux différences finies

Cf. Bamberger(1983), Temam(1970), Glowinski(1982), Richtmeyer-Morton(1967)

En pratique, quand on étudie un système physique dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielles (ou intégral-différentielles), dépendant de N variables d'espace (dans \mathbb{R}^N) et de la variable t , connaissant l'état du système à un instant initial t_0 , on souhaite visualiser son état pour des instants $t \geq 0$ en résolvant l'équation et en tenant compte d'éventuelles conditions aux limites.

- **Visualiser son état à un instant $t \geq 0$** peut signifier avoir à cette date une représentation approchée du système dans \mathbb{R}^N par exemple donnée par des fonctions de N variables d'espace, simples, constantes ou quadratiques sur des pavés ($\in \mathbb{R}^N$). Une norme choisie sur la classe de ces fonctions permet de donner un sens à l'écart entre deux représentations c'est à dire deux états du système.
- **Résoudre l'équation** peut signifier obtenir pour des dates successives t^n des représentations approchées sur \mathbb{R}^n , par l'intégration de l'équation approchée d'évolution du système.

V.1.1. Approximation des espaces d'études

- On souhaite approcher les éléments u d'un espace V par les éléments u_h d'un espace V_h

Approximation interne d'un espace normé V

- On parle d'approximation interne quand les espaces d'approximation V_h sont inclus dans V
- L'approximation interne d'un espace V normé est constitué par une famille de triplets $\{V_h, p_h, r_h\}$, $h \in H$, telle que:

V_h est un espace normé ($\subset V$)

p_h est un opérateur linéaire continu, dit de prolongement, de V_h dans V

r_h est un opérateur linéaire continu, dit de restriction, de V dans V_h

* on note $\|\cdot\|$ (respectivement $\|\cdot\|_h$) la norme dans V (respectivement dans V_h).

* $H = \prod_{h=1}^n \{[0, h_i^0]\}$. Dans le cas des méthodes aux différences finies h est le pas.

- Un opérateur de prolongement p_h est **stable** si sa norme:

$$\|p_h\| = \sup_{\substack{u_h \in V_h \\ \|u_h\| \leq 1}} \|p_h u_h\| \text{ est majorée indépendamment de } h$$

- Un opérateur de restriction r_h est **stable** si sa norme:

$$\|r_h\| = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| \leq 1}} \|r_h u\|_h \text{ est majorée indépendamment de } h$$

- L'approximation de V par $\{V_h, p_h, r_h\}$ est **stable** si les opérateurs p_h et r_h sont stables.
- L'approximation de V par $\{V_h, p_h, r_h\}$ est **convergente** si:

$$\forall u \in V \quad \lim_{h \rightarrow 0} p_h r_h u = u \quad \text{dans } V \text{ fort}$$

- **Théorème:** Si $\{V_h, p_h, r_h\}$ est une approximation stable de V , elle est convergente si et seulement si:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - p_h r_h u\| = 0 \quad \forall u \in W, W \text{ étant un sous-espace dense dans } V$$

* Dans la pratique p_h est souvent l'opérateur identité.

* Dans la pratique on utilise des approximations stables et convergentes de V

* Donc on pose souvent la **définition de l'approximation de V par la famille $\{V_h\}_h$** telle que:

La $\{V_h\}_h$ famille de sous-espaces fermés de V satisfait les conditions:

il existe $V \subset V$ tel que $\overline{V} = V$ et

$$r_h : V \rightarrow V_h \text{ telle que } \lim_{h \rightarrow 0} \|r_h u - u\| = 0, \quad \forall u \in V$$

V.1.1.1. Exemple d'approximation de $L^2(\mathbb{R}^N)$

Un exemple très connu d'approximation interne est la **méthode de Galerkin**.

- Soit Ω un domaine (convexe, ouvert) de \mathbb{R}^N qui peut être non borné
- $V = L^2(\Omega)$ (ou $L^p(\Omega), \forall p \quad 1 \leq p < \infty$)

muni du produit scalaire $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$

et de la norme associée $\|u\| = (\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx)^{1/2} \quad \forall u \in L^2(\Omega)$

avec $dx = dx_1 \quad \dots \quad dx_N$

- $H = \{h \in \mathbb{R}^N = (h_1, \dots, h_N)\}$

$$R_h = \{j_h \in \mathbb{R}^N = (j_1 h_1, \dots, j_N h_N), j \text{ entier de signe quelconque}\}$$

$$\Omega_h(M) \text{ avec } M = (x_1, \dots, x_N), \text{ le pavé } \prod_{i=1}^N [x_i x_i + h_i]$$

$$\delta_h(M) \text{ la fonction caractéristique du pavé } T_h(M)$$

(Remarque: on pouvait choisir des domaines Ω_h de géométrie différente ou irrégulière)

- On peut définir V_h comme un sous-espace de $L^2(\Omega)$ (ou $L^p(\Omega)$) tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} V_h = \left\{ u_h/u_h \in L^2(\Omega) \text{ (ou } L^p(\Omega)), u_h(x) = \sum_{M \in R_h} \delta_h(x) u_h(M), u_h(M) \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{avec } u_h(M) = \frac{\int_{\Omega_h(M)} u(x) dx}{\int_{\Omega_h(M)} dx} = (h_1 \dots h_N)^{-1} \int_{\Omega_h(M)} u(x) dx \quad \forall M \in R_h \end{array} \right\}$$

V_h est un espace de fonctions étagées, r_h est un opérateur moyenne sur les pavés Ω_h . En général R_h est de dimension finie, c'est alors la dimension de V_h et les fonctions δ_h en forment une base.

- on peut montrer que l'approximation de V par V_h est stable et convergente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{L^2(\Omega) \text{ (ou } L^p(\Omega))} = 0 \quad \forall u \in L^2(\Omega) \text{ (ou } L^p(\Omega))$$

on peut montrer aussi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall u \in C(\Omega)$$

Démonstration

- 1- L'approximation de Galerkin est **stable**.

* p_h est l'opérateur identité injectif, de norme unité

* $r_h u = u_h \quad \forall u \in V$ est l'opérateur de projection orthogonal de V sur V_h

$$(r_h u, v_h) = (u, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

r_h est surjectif, de norme unité

- 2- Pour montrer que l'approximation est **convergente**, il suffit de prouver que $\lim_{h \rightarrow 0} p_h r_h u = u$ dans $L^2(\Omega)$ fort pour toutes les fonctions u dans un s.e.v. dense dans $L^2(\Omega)$, comme l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω ($C_c(\Omega)$) ou $C_c^\infty(\Omega)$.

Soit $u \in C_c(\Omega)$ à support compact Ω' de \mathbb{R}^n (fermé, borné), on peut trouver une famille finie $(\Omega_i')_{i=1, \dots, N_h}$ telle que

$$\bullet \quad \Omega_i \cap \Omega_j' = \emptyset \quad \forall i, j = 1, \dots, N_h$$

tout Ω_i' est mesurable c'est-à-dire: $0 < \int_{\Omega_i'} dx < C$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall 1 \leq i, j \leq N_h \quad \text{avec } i \neq j$$

$$\bullet \quad \bigcup_{i=1}^{N_h} \Omega_i' = \Omega$$

$h = \sup \{ \delta_i \}_{i=1, \dots, N_h}$ avec $\delta_i = \text{diamètre de } \Omega_i$

$$\bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0} \| r_h u - u \|_{L^p(\Omega)} = \lim_{h \rightarrow 0} \inf \left\{ C \mid \sum_{i=1}^{N_h} r_h u(x) - u(x) \mid < C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \inf \left\{ C_i \mid \sum_{i=1}^{N_h} r_h u(x) - u(x) \mid < C_i \text{ p.p. sur } \Omega_i \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \inf \left\{ C_i \mid \sum_{i=1}^{N_h} \left| \frac{\int_{\Omega_i} u(x) dx}{\int_{\Omega_i} dx} - u(x) \right| < C_i \text{ p.p. sur } \Omega_i \right\}$$

$$= 0$$

$$\text{car } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\int_{\Omega} u(x) dx}{\int_{\Omega} dx} - u(x) \right| = 0 \quad \text{pour } u \in C_c(\Omega)$$

$$\bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0} \| r_h u - u \|_{L^p(\Omega)} = 0$$

V.1.1.2. Application à notre étude

Dans notre étude, la fonction u ne dépend que d'une variable d'espace x et donc cette variable et la variable t ont un rôle symétrique.

On approxime l'espace des fonctions $L^2([0, L])$ par des fonctions de $L^2([0, L])$, fonctions constantes par morceaux de pas h . En particulier la fonction condition initiale est approximée de cette manière.

On approxime l'espace des fonctions $L^2([0, T])$ par des fonctions de $L^2([0, T])$, fonctions constantes par morceaux de pas h' . En particulier on approxime la fonction vitesse $w(t) \in L^2([0, T])$ par une fonction $w_h \in L^2([0, T])$, et on obtient une approximation des courbes caractéristiques par des fonctions linéaires par morceaux.

On étudie ensuite les profils $u_b(x, t^n)$ résultats d'une intégration temporelle approchée de l'équation de transport, que nous allons maintenant décrire.

V.1.2. Approximation de l'équation hyperbolique par un schéma aux différences finies

Nous avons étudié un schéma aux différences finies pour approximer l'équation (V.35): **le schéma décentré**

V.1.2.1. Présentation du schéma décentré

• On discrétise l'espace $[0, L]$ en pas constants Δx et le temps $[0, T_f]$ en pas constants Δt .

Les abscisses discrètes sont notées x_j et les dates d'échantillonnages sont notées t^n .

On cherche à calculer une fonction $u_b(x, t)$ qui approxime la fonction $u(x, t)$ sur $(x, t) \in [0, L] \times [0, T_f]$.

On note $u_b(x_j, t^n) = u_j^n$.

On note $x_{j+1/2} = x_j + \frac{\Delta x}{2}$, $x_{j-1/2} = x_j - \frac{\Delta x}{2}$, $x_0 = 0$, $x_J = L$.

On note $t^n = n\Delta t$, $t^0 = 0$, $t^K = T_f$.

$u_b(x, t)$ est telle que:

$$\left\{ \begin{array}{llll} u_b(x, t) = u_j^n & \text{pour } (x, t) \in]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}[& j = 1, \dots, J-1 & n = 1, \dots, N-1 \\ \text{C.L. } u_b(x, t) = u_j^0 & \text{pour } (x, t) \in]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [0, t^1[& j = 1, \dots, J-1 & n = 0 \\ \text{C.L. } u_b(x, t) = u_0^n & \text{pour } (x, t) \in [0, \frac{\Delta x}{2}[\times [t^n, t^{n+1}[& j = 0 & n = 1, \dots, N-1 \\ u_b(x, t) = u_0^0 & \text{pour } (x, t) \in [0, \frac{\Delta x}{2}[\times [0, t^1[& j = 0 & n = 0 \\ u_b(x, t) = u_J^n & \text{pour } (x, t) \in]x_{J-1/2}, x_J] \times [t^n, t^{n+1}[& j = J & n = 0, \dots, N-1 \end{array} \right.$$

Il s'agit de se donner des approximations respectivement de $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$.

• On approxime les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ par des différences finies décentrées suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j^n}{\partial t} &\approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D_t^+(u_j^n) \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial x} &\approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = D_x^-(u_j^n) \end{aligned}$$

• On approxime la vitesse de propagation $w(t)$ entre deux dates successives t^n et t^{n+1} par sa valeur calculée en t^n à partir de la valeur u_j^n , x_j étant l'abscisse de l'extrémité de la canalisation.

- Le schéma d'approximation donne:

$$D_t^+(u_j^n) + w(t^n) \cdot D_x(u_j^n) = 0 \quad \forall (i,n) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{avec } w(t^n) = f(u_j^n)$$

C'est-à-dire:

$$u_j^{n+1} = \left(1 - w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \cdot u_j^n + \left(w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \cdot u_{j-1}^n \quad (\text{IV.38})$$

La condition initiale s'écrit:

$$u_j^0 = \bar{u}_j^0 \quad (= \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x,0) dx \text{ par exemple})$$

La condition aux limites s'écrit:

$$u_0^n = \bar{u}_0^n \quad (= \int_{t^n}^{t^{n+1}} u(0,t) dt \text{ par exemple})$$

- Autre interprétation de ce schéma

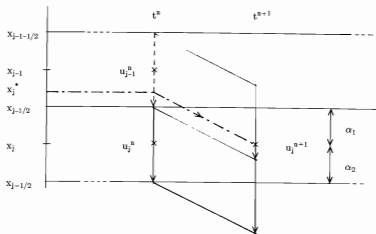


Figure 17

→ Soit la caractéristique issue du point u_j^{n+1} elle coupe la droite (x, t^n) au point (x_j^*, t^n) avec:

$$x_j^* = (w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) x_{j-1} + (1 - w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) x_j$$

x_j^* est une combinaison linéaire de x_{j-1} et x_j avec les poids $(w^n \frac{\Delta t}{\Delta x})$ et $(1 - w^n \frac{\Delta t}{\Delta x})$.

→ Soit la fonction linéaire:

$$P_1^n(x_{j-1}) = u_{j-1}^n$$

$$P_1^n(x_j) = u_j^n$$

$$P_1^n(x_j^*) = (w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) u_{j-1}^n + (1 - w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) u_j^n$$

Le schéma décentré consiste à prendre $u_j^{n+1} = P_1^n(x_j^*)$ au point (x_j, t^{n+1}) , c'est à dire à *calculer une interpolation linéaire entre les caractéristiques partant de u_{j-1}^n et u_j^n*

→ On peut dire aussi que pour calculer u_j^{n+1} on effectue une formule de moyenne sur $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$:

$$u_j^{n+1} = \alpha_1 u_{j-1}^n + \alpha_2 u_j^n = (w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) u_{j-1}^n + (1 - w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) u_j^n$$

Pour cette raison, on comprend que s'il existe au départ une discontinuité sur la fonction initiale ou la condition aux limites entre deux points d'échantillonnage donc entre le niveau sur les deux caractéristiques partant de ces deux points, cette discontinuité disparaît au travers du schéma qui fait des interpolations linéaires entre les discontinuités.

V.1.2.2. Le schéma décentré est explicite

Ce schéma est *explicite* car on peut exprimer directement u_j^{n+1} en fonction de u_j^n et u_{j-1}^n grâce au choix d'approximation de $w(t)$ par $w(t^n)$ sur $[t^n, t^{n+1}]$. **On a débouché de cette manière le calcul des températures à travers le réseau pour la date t^{n+1} , comme en statique on débouchait les calculs en inversant le sens d'intégration des équations.**

On remplace donc la vitesse de propagation par une fonction constante par morceaux, cela signifie qu'on approxime les courbes caractéristiques par des portions de droites sur chaque intervalle $[t^n, t^{n+1}]$.

V.1.2.3. Condition nécessaire de convergence du schéma

- Une condition nécessaire de convergence du schéma est la condition de **Courant-Friedrichs-Lewy**:

$$\alpha = w^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq V \quad n$$

$$\alpha = w_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (V.39)$$

- *Interprétation de cette condition:*

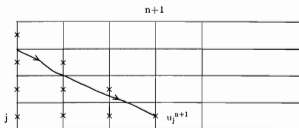


Figure 18

Le calcul de u_j^{n+1} au point $M(x_j, t^{n+1})$ fait intervenir deux valeurs u_{j-1}^n et u_j^n . En remontant de cette manière le temps et l'espace on peut connaître les points utiles au calcul de u_j^{n+1} l'ensemble de ces points constituent *le cône de dépendance numérique* (points marqués d'une croix sur la figure). Une condition nécessaire de convergence du schéma est que ce cône contienne la caractéristique arrivant au point $M(x_j, t^{n+1})$.

Ceci n'est vrai que si sur tout intervalle $[t^m, t^{m+1}]$, la condition donnée plus haut est vérifiée.

On voit que le calcul de u_j^{n+1} dépend de tout un cône de points et non seulement des points sur la caractéristique, on voit là un *effet de diffusion numérique*, qui explique aussi que les fronts raides ne se transmettent pas mais s'étalent.

V.1.2.4. Condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma

- **Stabilité L^∞**

- Supposons que les conditions initiales et aux limites soient bornées:

$$A < u_j^0 < B \quad u_j^0 \text{ étant les points de discrétisation de la condition initiale}$$

$$A < u_0^n < B \quad u_0^n \text{ étant les points de discrétisation de la condition aux limites}$$

$$A = \min \left\{ \min(u_j^0)_j, \min(u_0^n)_n \right\}$$

$$B = \sup \left\{ \sup(u_j^0)_j, \sup(u_0^n)_n \right\}$$

Si la condition de **Courant-Friedrichs-Lewy** est vérifiée, à savoir:

$$\alpha = w^a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \alpha = w_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

montrons alors qu'on a

$$\forall j \in [1, J] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A < u_j^n < B \quad (\text{IV.40})$$

Démonstration:

$$\text{Rappelons l'écriture du schéma: } u_j^{n+1} = \left(1 - w^a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \left(w^a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) u_{j-1}^n = \alpha_1 u_j^n + \alpha_2 u_{j-1}^n$$

- * α_1 et α_2 sont positifs, de somme 1, donc u_j^{n+1} est une combinaison linéaire de u_j^n et de u_{j-1}^n .
- * On montre par récurrence que si on a pour n et $j \in [1, J]$: $A < u_j^n < B$ (et par hypothèse on a aussi $A < u_0^{n+1} < B$)
on a pour $n+1$ et $j \in [1, J]$: $A < u_j^{n+1} < B$
donc on a montré (I).

En particulier si $A > 0$, on a montré que le schéma est positif

- **Stabilité L^q ($1 \leq q < \infty$)**

Soit $y \rightarrow \Phi(y)$ fonction réelle, *convexe*

$$\text{On a } \Phi(u_j^{n+1}) = \Phi(\alpha_1 u_j^n + \alpha_2 u_{j-1}^n) = \alpha_1 \Phi(u_j^n) + \alpha_2 \Phi(u_{j-1}^n)$$

Sommons en j sur $[1, J]$ et multiplions par Δx (on obtient une expression de la norme discrète L^2 de $\Phi(u^{n+1})$ sur $[0, L]$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^{n+1}) \Delta x &\leq \alpha_1 \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^n) \Delta x + \alpha_2 \sum_{j=1}^J \Phi(u_{j-1}^n) \Delta x \\ &= \alpha_1 \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^n) \Delta x + \alpha_2 \sum_{j=0}^{J-1} \Phi(u_j^n) \Delta x \\ &= \sum_{j=1}^{J-1} \Phi(u_j^n) \Delta x + \alpha_1 \Phi(u_J^n) \Delta x + \alpha_2 \Phi(u_0^n) \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^{n+1}) \Delta x &\leq \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^n) \Delta x \\ &\quad + \alpha_2 \Phi(u_0^n) \Delta x + (\alpha_1 - 1) \Phi(u_J^n) \Delta x \end{aligned}$$

On a $\alpha_1 - 1 \leq 0$,

on a $0 \leq \alpha_2 \leq 1$, donc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^{n+1}) \Delta x &\leq \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^n) \Delta x + \alpha_2 \Phi(u_0^n) \Delta x \\ &\leq \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^n) \Delta x + \Phi(u_0^n) \Delta x \end{aligned}$$

En posant $\Delta x = K \Delta t$, par récurrence on obtient:

$$\sum_{j=1}^J \Phi(u_j^{n+1}) \Delta x \leq K \sum_{l=0}^n \Phi(u_0^l) \Delta t + \sum_{j=1}^J \Phi(u_j^0) \Delta x$$

Si on choisit $\Phi(y) = |y|^q$, on obtient pour tout $1 \leq q \leq \infty$:

$$\sum_{j=1}^J |y|^q \leq K \sum_{l=0}^{n+1} |u_0^l|^q \Delta t + \sum_{j=1}^J |u_j^0|^q \Delta x$$

$$\|u^{n+1}\|_q \leq K \|u_0\|_q + \|u^0\|_q \quad (\text{IV.41})$$

Cela signifie que la norme q de u^n est majorée par une constante fois la somme des normes des conditions initiales et aux limites.

V.1.2.5. Condition suffisante de convergence du schéma décentré sous certaines hypothèses

On rappelle qu'à la suite $\{u_j^h\}$ est associée une fonction $u_h(x,t) \in L^2([0,L], L^2([0,T_f]))$ qu'on a définie plus haut.

On suppose que $w(t)$ est une fonction donnée de $L^2([0,T_f])$, bornée sans relation avec $u(1,t)$ c'est à dire qu'on détruit le bouclage qui apparaît dans l'équation (IV.35) de transport.

$w(t)$ est approchée par $w_h(t)$ constante par morceaux et $\|w_h(t) - w(t)\|_{L^2} \rightarrow 0$ quand $\Delta t \rightarrow 0$

1 - On utilise le résultat suivant dû à la stabilité du schéma:

Si on note $\|u^h\|^2 = \sum_{j=1}^J (u_j^h)^2 \Delta x$ on a:

$$\begin{cases} \|u^h\|^2 \leq K \\ \int_0^{T_f} \int_0^L (u_h(x,t))^2 dx dt \leq K T_f \end{cases}$$

autrement dit u_h est bornée dans $L^2([0,T_f], L^2([0,L]))$, on peut en extraire une sous-suite u_{h_k} convergent vers v dans $L^2([0,T_f], L^2([0,L]))$ faible.

2 - On souhaite montrer que cette sous-suite u_{h_k} (qu'on note u_h) converge vers v dans $L^2([0,T_f], L^2([0,1]))$ faible et qu'on a v solution faible du problème suivant:

$$(I) = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + w(t) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{C.I. } v(x,0) = u_h(x,0) \\ \text{C.L. } v(0,t) = u(0,t) \end{cases}$$

avec $w(t)$ fonction dans $L^2([0,T_f])$ bornée.

3 - On montre facilement que $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u$ dans $L^2([0,T_f], L^2([0,1]))$, et donc que u_h converge faiblement vers une solution de (I).

4 - Conclusion: Dans ce cas le schéma est convergent.

Remarque: On rappelle qu'une solution faible du problème (I) vérifie:

$$\int_Q \left(\frac{\partial v}{\partial t} + w(t) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^L u(x,0) \phi(x,0) dx + \int_0^{T_f} w(t) u(0,t) \phi(0,t) dt \quad \forall \phi \in D(Q)$$

avec $D(Q)$ ensemble des fonctions $C^\infty(Q)$ et $Q =]0,T_f[\times]0,L[$

Démonstration

2 - * Soient les fonctions régulières à support compact sur Q : $\phi \in C^\infty(Q)$

* Posons $\phi_j^2 = \phi(x_j t^n)$

* Rappelons que le schéma s'écrit:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = w^n \frac{u_i^{n-1} - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

* On multiplie par $(\phi_j^n \Delta t \Delta x)$, on somme sur $j=1, J$ et $n=0, N-1$ et on obtient

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \phi_j^2 \Delta x \Delta t + \sum_{n=0}^{N-1} w^n \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \phi_j^2 \Delta x \Delta t = 0 \quad (1)$$

* On réécrit chacun des deux termes composant (1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \phi_j^n \Delta x \Delta t &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^J u_j^n \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \Delta x \Delta t \\ &\quad + \sum_{j=1}^J u_j^0 \phi_j^0 \Delta x + \sum_{j=1}^J u_j^N \phi_j^{N-1} \Delta x \\ \sum_{n=0}^{N-1} w^n \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \phi_j^2 \Delta x \Delta t &= - \sum_{n=0}^{N-1} w^n \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n \left(\frac{\phi_{j+1}^2 - \phi_j^2}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta t \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} w^n u_J^n \phi_J^2 \Delta x - \sum_{n=0}^{N-1} w^n u_0^n \phi_1^n \Delta t \end{aligned}$$

Comme ϕ est à support compact sur Q on a $\phi_j^2 = 0 \quad \forall n$, pour $\Delta x \leq \Delta x(\phi)$ dépendant du support de ϕ .

De même on a $\phi_j^{N-1} = 0 \quad \forall j$, pour $\Delta t \leq \Delta t(\phi)$ dépendant du support de ϕ .

* On a mis l'expression (1) sous la forme (2):

$$(2) = \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right) &= w^n \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta t \\ &\quad + \sum_{j=1}^{J-1} w^0 u_j^0 \left(\frac{\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta t \\ &\quad + \sum_{j=1}^J u_j^0 \phi_j^0 \Delta x \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} w^n u_0^n \phi_1^n \Delta t \end{aligned} \right.$$

* Posons :

$$\psi_n^j = \frac{\Delta t}{\phi_n^j - \phi_{n-1}^j} + w_n \quad \text{avec } w_n = w(n\Delta t)$$

$$\psi_n^j = 0 \quad \forall j, \text{ pour } \Delta t \leq \Delta t(\phi)$$

$$\psi_n^j = 0 \quad \forall n, \text{ pour } \Delta x \leq \Delta x(\phi)$$

* Introduisons la fonction constante par morceaux ψ_h :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{C.L.} \quad \psi_h(x,t) = \psi_n^j & \text{pour } (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n^{j-1/2}, t_n^{j+1/2}] \\ \text{C.L.} \quad \psi_h(x,t) = \psi_n^j & \text{pour } (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n^{j-1/2}, t_n^{j+1/2}] \\ \text{C.L.} \quad \psi_h(x,t) = \psi_n^j & \text{pour } (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t_n^{j-1/2}, t_n^{j+1/2}] \end{array} \right.$$

* Avec les hypothèses ϕ à support compact sur \mathbb{Q} , ϕ régulière, et w_h convergant fortement vers w dans $L^2_{loc}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$, on voit facilement que ψ vérifie :

$$\psi_t(x,t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi(x,t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi(x,t) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{Q}) \text{ fort}$$

* On a (2bis) :

$$\int \int u_h(x,t) \psi_h(x,t) dx dt = \int_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{l=N} \psi_n^j u_n^j \Delta t \Delta x$$

$$- \sum_{j=1}^{j=N} u_n^j \psi_n^j \Delta x \Delta t$$

$$- \sum_{l=1}^{l=N} u_n^l \psi_n^l \Delta x \Delta t$$

* En utilisant (2) on obtient :

$$\int u_h(x,t) \psi_h(x,t) dx dt = \int_{j=1}^{j=N} \sum_{l=1}^{l=N} w_n^l \psi_n^l u_n^l \Delta x \Delta t + \int \frac{\Delta x}{\phi_n^j} \Delta x \Delta t$$

$$+ \sum_{j=1}^{j=N} u_n^j \psi_n^j \Delta x$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=N} u_n^l \psi_n^l \Delta x$$

$$\sum_{j=1}^{j=N} u_n^j \psi_n^j \Delta x$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_n^0 \psi_0^0 \Delta x \Delta t$$

* On sait que u_h converge faiblement vers v dans $L^2(Q)$, que ψ_h converge fortement vers ψ dans $L^2([0, T])$ et w_h converge fortement vers w dans L^2

Donc on a les convergences suivantes:

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^J u_j^0 \phi_j^0 \Delta x &\rightarrow \int_0^L v(x,0) \phi(x,0) dx \\ \sum_{n=0}^{N-1} w^n u_0^0 \phi_1^0 \Delta t &\rightarrow \int_0^L w(t)v(0,t) \phi(0,t) dt \\ \left(\sum_{j=1}^J u_j^0 \psi_j^0 \Delta x \right) \Delta t \text{ et } \left(\sum_{n=0}^{N-1} u_0^n \psi_0^0 \Delta t \right) \Delta x &\rightarrow 0 \\ \left(\sum_{j=1}^{J-1} w^0 u_j^0 \left(\frac{\phi_{j+1}^0 - \phi_j^0}{\Delta x} \right) \Delta x \right) \Delta t &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

* Donc: $\int_Q v \psi dxdt = \int_0^L v(x,0)\phi(x,0)dx + \int_0^T w(t)v(0,t)\phi(0,t)dt$

* Donc: $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = v$ dans $L^2([0, T], L^2([0, L]))$ faible, avec v solution faible de (I)

3 - * Montrons que $\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u$ dans $L^2([0, T], L^2([0, L]))$

- S'il n'y a pas convergence faible de u_h vers u cela signifie:

$$\exists v \in L^2(Q) \text{ telle que } (u_h, v)_{L^2} \not\rightarrow (u, v)_{L^2}$$

Donc il existe une sous suite $u_{h'}$ et $\epsilon > 0$ telle que $|(u_{h'}, v) - (u, v)| \geq \epsilon \quad \forall h'$

- De $u_{h'}$ on peut extraire une sous-suite u_k qui converge vers u dans L^2 faible et telle que

$$\lim_{k \rightarrow 0} (u_k, v) = (u, v)$$

Ceci est contradictoire avec l'hypothèse donc u_h converge faiblement vers u .

Remarque:

Le problème qui apparaît quand on veut démontrer la convergence du schéma, dans le cas où la vitesse $w(t)$ est liée par bouclage avec u , est qu'on ne peut pas montrer comme précédemment facilement que la fonction ψ_h converge vers $\frac{\partial \phi}{\partial t} + w(t) \frac{\partial \phi}{\partial x}$ car on n'a plus de résultat de convergence de w^h vers $w(t)$ dans ce cas.

V.1.2.6. Diffusion numérique du schéma et déformation des fronts raides

On sait que la fonction $u(x,t)$ est constante le long des caractéristiques d'équation $x=w(t) t$.

Quand on discrétise l'équation de transport, on utilise l'approximation $w(t^n)$ de la vitesse $w(t)$ entre deux pas d'échantillonnage en temps t^n et t^{n+1} c'est-à-dire que les caractéristiques approchées ont pour équation $x=w(t^n) t$ sur $[t^n, t^{n+1}]$.

Si $w(t^n) = w_{\max}$ et qu'on se place à la limite de la condition de stabilité du schéma numérique $w_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$, le schéma décentré donne le calcul:

$$u_j^n = u_{j-1}^{n-1}$$

qui est la solution exacte de l'équation de transport si effectivement la vitesse w est constante sur $[t^n, t^{n+1}]$.

Ainsi on voit que l'approximation de la solution donnée par le schéma est d'autant meilleure, que d'une part on se situe proche de la limite de la condition de stabilité du schéma, et que d'autre part $w(t^n)$ ne soit pas trop éloigné de w_{\max} , c'est à dire qu'on ne donne pas une majoration trop grande des vitesses pouvant exister dans la canalisation.

Résumons les raisons qui nous poussent à utiliser des schémas numériques qui ne diffusent pas.

Les fronts raides, qui peuvent être envoyés par la condition aux limites $h(t)$, sont déformés au travers du schéma décentré en des fronts inclinés plus ou moins fortement.

Mais cela provoque aussi des déformations sur l'allure de la courbe $w(t) = f(u(1,t))$. Ce sont là les raisons qui nous poussent à construire des schémas numériques qui ne diffusent pas.

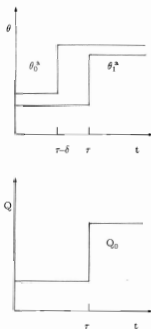
Prenons un exemple et pour cela revenons au problème physique de départ et prenons le cas d'un réseau simple à une chaufferie et une sous-station.

Imaginons qu'à une date τ , il y ait une augmentation brutale de demande à la sous-station. Supposons que jusqu'à cette date la température à l'entrée de la sous-station soit à un niveau optimum stationnaire (en effet toutes les variables extérieures sont supposées constantes; cet optimum peut être calculé par une simulation en régime statique), de même après la date τ . Pour cela il a fallu qu'un front de chaleur soit envoyé à la chaufferie à une date $\bar{\tau} = \tau - \delta$, δ étant le temps de transit du fluide vers la sous-station, préparant l'augmentation de demande. On obtient le type de réponse de la Figure 19 sur la température et le débit, quand les températures sont calculées exactement.

Supposons que les températures soient calculées par le schéma décentré. Le front à la chaufferie s'est transformé en un front incliné ou étalé après τ à la sous-station et la courbe du débit en conséquence se déforme aussi. Après τ le débit croît plus que sur la Figure 19 car la température

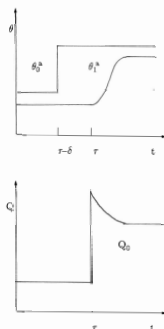
à la sous-station n'est pas encore au deuxième niveau stationnaire, il présente une pointe qui n'existe pas dans la réalité.

Cette remarque est purement qualitative (les courbes tracées sur la Figure 19 et 19bis sont fictives) et on verra plus en détail au chapitre VII rapportant des simulations et des optimisations effectuées à partir du schéma décentré, des courbes calculées réellement.



Courbes réelles

Figure 19



Courbes obtenues avec
le schéma décentré

Figure 19bis

V.1.2.7. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques

- On applique le schéma décentré à la température \tilde{T} :

$$\tilde{T}_j^{n+1} = (1 - w^* \frac{\Delta t}{\Delta x}) \tilde{T}_j^n + (w^* \frac{\Delta t}{\Delta x}) \tilde{T}_{j-1}^n$$

$$\text{avec } w^* = w(t^*) = f(\tilde{T}_j^n e^{-\lambda t^n} + \theta_0)$$

$$\text{avec la condition aux limites } \tilde{T}_0^n + (g^* - \theta_0) e^{-\lambda t^n}$$

$$\text{avec la condition initiale } \tilde{T}_j^0 = \theta_0$$

- En remplaçant dans le schéma décentré $\tilde{T}_j^n = (\tilde{T}_j^n - \theta_0) e^{\lambda t^n}$ on obtient:

$$T_j^{n+1} = (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} w^*) e^{-\lambda(t^{n+1}-t^n)} T_j^n + (w^* \frac{\Delta t}{\Delta x}) e^{-\lambda(t^{n+1}-t^n)} T_{j-1}^n + \theta_0 e^{-\lambda(t^{n+1}-t^n)}$$

$$T_j^{n+1} \approx (1 - \lambda \Delta t) ((1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} w^n) T_j^n + (w^n \frac{\Delta t}{\Delta x}) T_{j-1}^n + \theta_0) \quad (IV.42)$$

$$\text{avec } w^n = w(t^n) = f(T_j^n)$$

$$\text{avec la condition aux limites } T_0^n = g^n$$

$$\text{avec la condition initiale } T_j^0 = T(x_j, t^0)$$

V.2. Introduction d'autres schémas numériques

V.2.1. Motivations

Nous souhaitons utiliser des schémas numériques qui respectent au mieux l'équation exacte, c'est à dire qui propagent en les déformant le moins possible les discontinuités existant sur la fonction $u(x,t)$, donc en particulier qui diffusent le moins possible.

Pour un schéma, qui approxime sur chaque pas de temps $[t^n, t^{n+1}]$ la vitesse de propagation $w(t)$ par sa valeur en t^n on respecte au mieux l'équation si la solution approchée garde u constante le long des caractéristiques approchées $x = w(t^n) t$ sur le pas de temps considéré.

V.2.2. Première définition d'un schéma sans diffusion

V.2.2.1. Présentation du schéma

- On garde une discrétisation fixe à pas constants Δx en espace.

On approxime la condition initiale comme dans le cas du schéma décentré.

- On calcule la discrétisation en temps en même temps qu'on progresse dans le calcul de la fonction approchée u_h .

A chaque date t^n , quand les valeurs u_j^n sont connues, on calcule w^n à partir de u_j^n et on calcule un nouveau pas de temps Δt^n tel que $\Delta x = w^n \Delta t^n$, c'est à dire que la date t^{n+1} est la date à laquelle la caractéristique approchée partant de l'abscisse x_j passe à l'abscisse suivante x_{j+1} .

Ainsi les caractéristiques sont aussi approchées par des fonctions linéaires par morceaux, mais cette fois-ci sur des pas de temps inversement proportionnels à la vitesse. La discrétisation en temps est d'autant plus fine que la vitesse de transport du fluide est élevée.

- On respecte alors la conservation de u le long des caractéristiques avec le schéma:

$$\Delta x = w^n \Delta t^n \quad (\text{IV.43})$$

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \quad (\text{IV.43bis})$$

- On n'effectue pas d'interpolation entre caractéristiques.

Les discontinuités sur les niveaux de deux caractéristiques restent présentes. Sur "une bande" en temps et espace délimitée par l'approximation de deux caractéristiques la fonction u est constante, et il peut exister des sauts entre le niveau de deux bandes contigües (Figure 20).

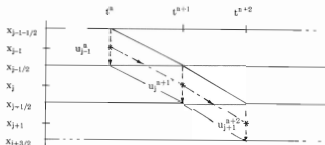


Figure 20

Remarque 1:

La discrétisation en temps de ce schéma dépend étroitement de la vitesse existant dans la canalisation. Donc pour deux canalisations s'enchaînant, avec un échangeur situé entre ces deux canalisations, les vitesses y circulant sont différentes au même instant et donc les discrétisations en temps sont différentes. Nous verrons plus en détail au chapitre suivant quels genres de problèmes cela peut poser.

Remarque 2:

S'il apparaît une variation dans les données du problème (comme une variation de demande à une sous-station), le schéma ne prend pas en compte instantanément cette variation (c'est la même chose avec le schéma décentré et c'est le propre de nombreux schémas de discrétisation, les pas d'échantillonnages ne coïncident pas toujours avec les dates de variations des données et les erreurs faites font partie de l'analyse de la précision du schéma). Nous faisons cependant cette remarque, car elle aura des conséquences quand nous étudierons l'application de ce schéma à une succession de canalisations.

V.2.2.2. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques

$$\Delta x = w^a \Delta t^a$$

$$T_j^{n+1} = T_{j-1}^n e^{-\lambda \Delta t^a} \quad (\text{IV.44})$$

$$T_j^{n+1} \approx (1 - \lambda \Delta t^a) T_{j-1}^n \quad (\text{IV.44bis})$$

V.2.3. Deuxième définition d'un schéma sans diffusion: schéma particulaire

La motivation de ce deuxième schéma est d'obtenir un schéma possédant une discrétisation en temps qui puisse être commune à plusieurs canalisations et qui suive les discontinuités pouvant exister sur la fonction u sans les déformer.

Appuyons nous sur le problème physique posé pour illustrer les discontinuités pouvant exister dans le réseau. Les discontinuités sur u peuvent être dues à une discontinuité *sur des données du problème* (par exemple il peut y avoir des discontinuités dans les profils initiaux de températures), à une variation brutale de demande à un échangeur qui entraîne une variation brutale de température à la sortie de cet échangeur donc dans la canalisation retour et une variation brutale de débit dans cet échangeur), ou enfin à une discontinuité *sur la courbe de commande* en température à la chaufferie puisqu'on l'a choisie de classe $L^2([0, T_f])$.

V.2.3.1. Principe du schéma particulaire

On souhaite suivre chacune des discontinuités, qui existent ou se créent dans la canalisation, et qui se transportent au cours du temps dans la canalisation.

Pour cela on lui associe une "particule" définie comme étant une portion de fluide de longueur variable dans ses déplacements dans le temps et dans l'espace, de niveau thermique constant sur la particule mais variable dans ses déplacements dans le temps et l'espace, sans continuité thermique avec la particule la précédent ou la particule lui succédant.

- **Initialisation:** A la date initiale, on approxime l'état thermique de la canalisation en lui donnant une représentation sous forme d'un nombre arbitraire de portions de fluide se succédant pour remplir totalement la canalisation, chacune étant à une température donnée et ayant une longueur donnée. Pour un profil uniforme, cette approximation peut être une succession de portions de fluide de longueurs identiques Δx , chacune à la température moyenne du fluide sur sa longueur. On a alors une représentation du profil de départ identique à celle utilisée pour le schéma décentré ou le premier schéma sans diffusion numérique. Pour un profil non uniforme, on peut placer le début d'une portion de fluide (dans le sens écoulement du fluide) à chaque discontinuité du profil et augmenter le nombre de particules aux endroits où le profil varie beaucoup, pour en avoir une représentation plus fine.
- On choisit de **faire entrer une nouvelle particule à la chaufferie à la cadence régulière** d'un pas d'horloge Δt_b . Ces particules entrantes représentent la commande ou le niveau thermique à la sortie de la chaufferie. Les dates t_b sont des dates d'échantillonnages particulières de ce schéma.
- On choisit de **retenir d'autres dates d'échantillonnages notées t^n** , correspondant à chaque date t où une discontinuité sur une température (représentée par une particule existante) provoque une autre discontinuité dans la canalisation, soit sur une température (on crée alors une nouvelle particule représentant cette discontinuité), soit sur le débit.

Illustrons ce genre de phénomène:

Dans l'étude d'une seule canalisation, on ne peut pas donner beaucoup d'exemples pour illustrer le choix de ces dates t^n la variété sera plus grande dans le cas d'un réseau complet. Pourtant on peut déjà dire qu'une particule atteignant l'extrémité de la canalisation provoque d'une part un changement du débit, d'autre part puisqu'elle entre dans l'échangeur, elle provoque un changement de température à la sortie de l'échangeur, on crée une nouvelle particule sortante représentant le nouveau niveau thermique à la sortie de l'échangeur (calculé à partir de la relation à l'échangeur II.4).

Remarquons qu'avec ce choix "adaptatif" des dates t^n avec les événements qui arrivent dans le réseau, on prend en compte instantanément les variations sur les températures ou les débits. Ceci n'était pas le cas

ni dans le schéma décentré, ni dans le premier schéma "sans diffusion" où il fallait attendre le pas de temps suivant pour prendre en compte ces variations.

Le schéma particulaire consiste essentiellement à suivre l'évolution de chaque particule j dans la canalisation, c'est à dire sa position X_j^n et son niveau u_j^n

- *La position d'une particule dans la canalisation est donnée par la position du début de la particule.*

Entre deux dates t^n et t^{n+1} une particule se déplace avec la vitesse w^n le long de sa caractéristique, et son niveau u_j^n est constant.

$$X_j^{n+1} = X_j^n + w^n (t^{n+1} - t^n) \quad (\text{IV.45})$$

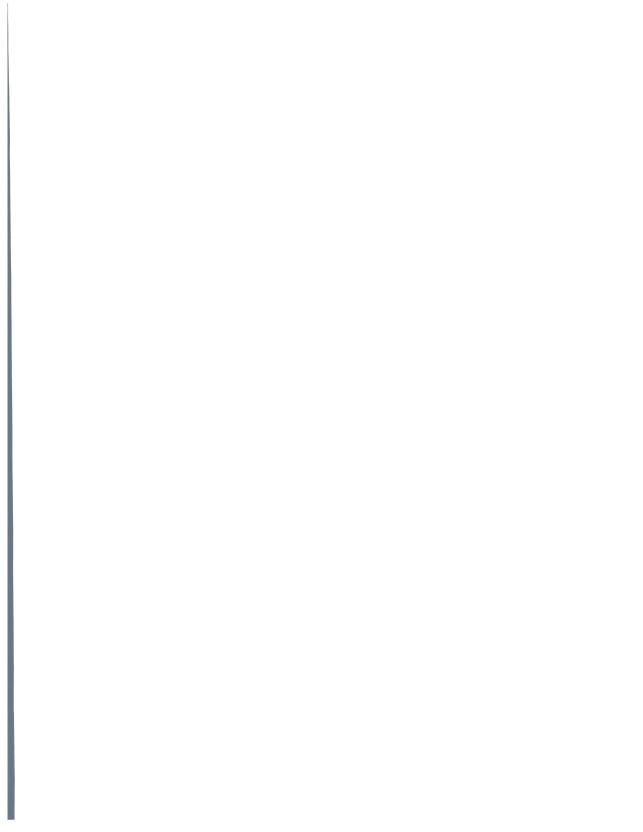
$$u_j^{n+1} = u_j^n \quad (\text{IV.46})$$

V.2.3.2. Retour à l'équation de départ sur les températures avec coefficient de pertes thermiques

$$X_j^{n+1} = X_j^n + w^n (t^{n+1} - t^n) \quad (\text{IV.45})$$

$$T_j^{n+1} = T_j^n e^{(-\lambda \Delta t^n)} \quad (\text{IV.47})$$

$$T_j^{n+1} \approx T_j^n (1 - \lambda \Delta t^n)$$



CHAPITRE V

SIMULATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DU RESEAU

Dans ce chapitre, maintenant que nous avons donné la description de la manière dont nous avons discrétisé l'équation de transport qui régit la propagation des températures dans une canalisation, nous allons voir comment s'enchaînent les calculs des températures et des autres variables d'une canalisation à une autre et faire quelques remarques sur les discrétisations que nous avons vues au chapitre IV.

Nous décrivons donc dans ce chapitre la méthode de simulation du comportement dynamique d'un réseau arborescent, pour plusieurs types d'approximation numérique des équations dynamiques.

Désormais nous faisons intervenir trois indices pour repérer les variables dans le réseau.

N_{noe} est le nombre de noeuds présents dans le réseau.

| | |
|---|-------------------------------------|
| Indice sur les noeuds: | $k = 0, \dots, N_{\text{noe}}$ |
| Indice sur les abscisses dans une canalisation k: | $i = 0, \dots, M_k$ |
| Indice sur les dates: | $j = 0, \dots, N \text{ (ou } N_k)$ |

Nous rappelons l'écriture des principales relations entre variables du réseau, en utilisant les notations discrètes, et les relations de récurrence sur les indices en temps (j) et en espace (i et k) qui apparaissent et on en déduit la logique d'organisation des calculs.

1. Schéma aux différences finies

Pour ce schéma aucune difficulté nouvelle n'apparaît quand on enchaîne l'intégration des températures d'une canalisation à la suivante.

Nous rappelons l'ensemble des relations discrètes vérifiées à travers le réseau. Nous décrivons l'organisation des calculs, qui se déroulent comme le phénomène physique modélisé (selon les temps croissants, et en se propageant en espace dans le sens de l'écoulement du fluide).

1.1. Choix d'une discrétisation

- On choisit une discrétisation en temps commune à toutes les canalisations, de pas Δt constant.

On remplace chaque fonction $f(t)$ du temps par une suite de $N+1$ variables discrètes $f(j)$ correspondant aux valeurs de la fonction aux dates t_j :

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_j = j\Delta t, \dots, t_N = N\Delta t$$

- On choisit une discrétisation en espace Δx_k constante pour chaque canalisation k (non nécessairement la même sur chaque canalisation, mais plutôt adaptée à sa longueur L_k), telle que le premier pas d'espace soit à l'abscisse du début de la canalisation et le dernier pas d'espace à l'abscisse de la fin de la canalisation.

On remplace chaque fonction $f(x)$ en espace par une suite de M_k variables discrètes $f(i)$ correspondant aux valeurs de la fonction aux abscisses x_i :

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, \dots, x_i = (i-1)\Delta x, \dots, x_{M_k} = (M_k-1)\Delta x$$

Pour les températures $T_k(x,t)$, fonction du temps et de l'espace on les remplace par une suite de $(N+1) \times M_k$ variables discrètes $T_k(i,j)$ correspondant aux valeurs de la fonction approchée aux abscisses x_i, t_j

Cette discrétisation en temps et espace est choisie de manière à vérifier la condition de stabilité du schéma décentré.

1.2. Vérifications des équations à travers le réseau

• Equations instantanées

Comme les dates d'échantillonnages en temps sont identiques pour toutes les variables du réseau, il n'y a pas de difficulté à écrire les relations instantanées sur l'ensemble du réseau. On retrouve les équations statiques données aux chapitres II et III exprimées à chaque date t_j .

Résumé des relations instantanées reliant des variables de deux noeuds consécutifs k et k+1 ou un noeud père k et ses noeuds fils $\bar{0}$ et $\bar{0}$

$$Q_k(j) = \phi_k(\theta_k^*(j), W_k(j)) \quad (V.48)$$

$$\theta_k^*(j) = \psi_k(\theta_k^*(j), W_k(j)) \quad (V.49)$$

$$S_k(j) = S_{k+1}(j) + Q_{k+1}(j) \quad \text{ou} \quad S_k(j) = \bar{S}_0(j) + \bar{S}_0(j) \quad (V.50)$$

$$\theta_k^*(j) = \frac{\theta_k^*(j) Q_k(j) + \theta_k^*(j) S_k(j)}{(S_k(j) + Q_k(j))} \quad (V.51)$$

• Equations dynamiques approchées

Les équations de transport sont approchées dans chaque canalisation par le schéma décentré. On peut passer simplement des calculs des températures d'une canalisation à la suivante, sans faire d'interpolation, puisqu'on a choisi des pas de discrétisation en espace tels que le dernier pas de discrétisation en espace d'une canalisation k soit l'abscisse L_k de l'extrémité du canal, c'est à dire de l'entrée de l'échangeur k et aussi la première abscisse du canal aval k+1 et que d'autre part les dates t_j sont communes à toutes les canalisations.

Résumé des relations permettant le calcul des températures aller à la date t_j :

$$* \quad T_k(i,j) = FA_k^i(T_k(i,j-1), T_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) \quad k = 0, \dots, N_{\text{doe}} \quad i = 1, \dots, M_k \quad j = 1, \dots, N \quad (V.52)$$

$$* \text{ C.I. } T_k(i,0) = T0_k(i) \quad k = 0, \dots, N_{\text{doe}} \quad i = 0, \dots, M_k \quad j = 0 \quad (V.53)$$

$$* \text{ C.L. } T_k(0,j) = T_{k-1}(M_{k-1},j) \quad k = 1, \dots, N_{\text{doe}} \quad i = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (V.54)$$

$$= \theta_k^*(j)$$

$$* \text{ C.L. } T_0(0,j) = u_1(j) \quad k = 0 \quad i = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (V.55)$$

$$* \quad = \theta_0^*(j)$$

avec

$$FA_k^i(T_k(i,j-1), T_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) = (1 - \lambda_k \Delta t) \left[\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x_k} \alpha_k S_k(j-1) \right) T_k(i,j-1) \right. \\ \left. + (\alpha_k \frac{\Delta t}{\Delta x_k} S_k(j-1)) T_k(i-1,j-1) + \theta_0 \right]$$

Résumé des relations permettant le calcul des températures retour à la date t_j :

$$* \quad \bar{T}_k(i,j) = FR_k(\bar{T}_k(i,j-1), \bar{T}_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) \quad k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \quad i = 1, \dots, M_k \quad j = 1, \dots, N \quad (V.56)$$

$$* \text{ C.L. } \bar{T}_k(i,0) = \bar{T}_0(i) \quad k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \quad i = 0, \dots, M_k \quad j = 0 \quad (V.57)$$

$$* \text{ C.L. } \bar{T}_k(0,j) = \frac{\bar{T}_{k+1}(M_{k+1},j) S_{k+1}(j) + \theta_{k+1}(j) Q_{k+1}(j)}{S_{k+1}(j) + Q_{k+1}(j)} \quad k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \quad i = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (V.58)$$

$$- \theta_{k+1}(j)$$

avec

$$FR_k(\bar{T}_k(i,j-1), \bar{T}_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) = (1 - \lambda_k \Delta t) \left[\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x_k} \alpha_k S_k(j-1) \right) \bar{T}_k(i,j-1) \right. \\ \left. + \left(\alpha_k \frac{\Delta t}{\Delta x_k} S_k(j-1) \right) \bar{T}_k(i-1,j-1) + \theta_0 \right]$$

avec

$$\alpha_k S_k(j) = w_k(j)$$

1.3. Organisation du calcul des variables

- Les calculs se mènent pas de temps après pas de temps. Pour chaque date t_j , les vitesses (ou débits) servant dans les calculs de la propagation des températures sont les vitesses (ou débits) calculés au pas t_{j-1} (**schéma explicite en temps**).
- A la date initiale les températures sont données par (V.53) et (V.57), les débits correspondants sont calculés.
- Les calculs à chaque date t_j se propagent dans l'espace dans le sens réel de la propagation du fluide.

Ils se propagent donc de la première canalisation aller partant de la chaufferie vers la dernière canalisation allant vers une feuille puis dans le sens inverse sur les canalisation retour.

- * Pour chaque canalisation aller k , on calcule les températures par (V.54-55) puis (V.52) et le calcul au dernier pas d'espace donne la valeur de la température à l'extrémité de la canalisation, qui correspond à la température au premier pas d'espace sur la canalisation en aval $k+1$ mais aussi à la température à l'entrée de l'échangeur $k+1$ s'il y a une sous-station en $k+1$. On calcule le débit dans cet échangeur (V.48), la température à la sortie de cet échangeur (V.49).

On continue les calculs des températures aller sur la canalisation aval $k+1$, une nouvelle

condition aux limites(V.54), c'est à dire la température à la première abscisse de la canalisation k+1 vient d'être calculée.

- * **Pour chaque canalisation retour k**, on calcule les températures par (V.58) et (V.56) et en même temps on remet à jour les débits canaux dans le réseau (V.50).

Pour chaque canalisation retour k, le calcul au dernier pas d'espace donne la valeur de la température à la fin de la canalisation. Par un bilan thermique de mélange de cette température avec la température à la sortie de l'échangeur k (V.58), on obtient la température au départ de la canalisation en amont k-1, qui est une nouvelle condition aux limites.

- * **Le calcul des différences de pression** peut se faire ensuite après le calcul des autres variables.

1 * cas: Simulation.

La courbe des différences de pression à la chaufferie $\Delta p_0(t)$ n'est pas donnée.

A chaque date t_j , on calcule les différences de pression $\Delta p_k(j)$ à travers le réseau en plusieurs étapes; on reprend la méthode de calcul exposée dans le cas de l'étude du régime statique au chapitre III.

on initialise les différences de pression $\Delta p_k(j)$ aux feuilles afin d'y assurer la différence de pression minimale pour faire circuler les débits calculés $Q_k(j)$.

$$\Delta p_k(j) = R_k Q_k^2(j) \quad (V.59)$$

on propage un calcul des différences de pression $\Delta p_k(j)$ dans le sens "feuilles vers chaufferie" en comptabilisant les pertes de charge singulières dans les échangeurs (II.6) et linéiques dans les canalisations (III-19).

$$\Delta p_k(j) = \Delta p_{k+1}(j) + (r_k^a + r_k^v) S_k^2(j) \quad (V.60)$$

On retient dans une variable auxiliaire μ_k le niveau dont il faut remonter la différence de pression à certains échangeurs où la contrainte inégalité (II.7) n'est pas satisfaite.

$$\mu_k(j) = \text{Max} \{ \mu_{k+1}(j), R_k Q_k^2(j) - \Delta p_k(j) \}$$

On obtient à la chaufferie le calcul de $\Delta p_0(j)$ qui, additionné du niveau $\mu_0(j)$, donne le niveau $\Delta p_{\text{min}}(j)$ en chaufferie propre à satisfaire les contraintes aux échangeurs.

Pour obtenir la véritable carte des différences de pression admissibles dans le réseau, il suffit de reprendre toutes les différences de pression calculées et les remonter de la quantité $\mu_0(j)$.

2^e cas: Optimisation.

La courbe des différences de pression à la chaufferie $\Delta p_0(t)$ est donnée comme commande.

A chaque date t_j , on propage les différences de pression de la chaufferie vers les noeuds feuilles en comptabilisant les pertes de charges le long du réseau selon la relation (V.50) inversée.

II. Premier schéma sans diffusion

Pour ce schéma, nous allons voir qu'il apparait des difficultés pour vérifier les relations instantanées qui existent entre des variables de canalisations différentes, les discrétisations en temps étant propres à chacune d'elles.

Après avoir souligné ces difficultés nous donnons une organisation des calculs qui en tienne compte et qui maintenant ne se déroule plus selon le schéma immuable rencontré ci-dessus.

II.1. Choix d'une discrétisation

- On choisit une discrétisation en espace Δx_k constante pour chaque canalisation k , qui peut être identique à celle choisie pour le schéma décentré.
- Les discrétisations temporelles sont différentes pour chaque canalisation k .
Elles sont construites simultanément avec le calcul des variables températures et débits au lieu d'être préétablies comme dans le cas du premier schéma.

II.2. Vérification des équations à travers le réseau et construction des grilles temporelles

II.2.1. Notations

Donnons quelques notations qu'on utilise au cours du calcul des variables

t_j^k : $j^{\text{ème}}$ date calculée de la grille k associée à la canalisation k . $j = 1, \dots, j_k^* + 1$

Δt_j^k : $j^{\text{ème}}$ pas de temps calculé de la grille k associée à la canalisation k $j = 1, \dots, j_k^*$

II.2.2. Remarques sur les relations statiques et dynamiques

Rappelons encore une fois quelques relations statiques ou dynamiques et faisons quelques remarques:

$$(1) \quad \theta_k^s(j) = T_{k-1}(M_{k-1}, j')$$

La température aller à la première abscisse de la canalisation k à la date t_j^k se déduit de la température à la dernière abscisse de la canalisation $k-1$ à une date t_{j-1}^{k-1} et une condition de causalité temporelle doit être respectée dans ce calcul.

$$(2) \quad T_k(i, j) = FA_k^2(T_k(i-1, j-1), S_k(j-1), \Delta t_{j-1}^k) = (1 - \lambda_k \frac{\Delta x_k}{\alpha_k S_k(j-1)}) T_k(i-1, j-1)$$

$$(3) \quad Q_k(j) = \phi_k(\theta_k^s(j), W_k(j))$$

$$(4) \quad S_k(j) = S_{k+1}(j^n) + Q_{k+1}(j^n)$$

Le débit dans la canalisation k à la date t_j^k se déduit des débits dans l'échangeur et la canalisation aval $k+1$ à une date t_j^{k+1} et une condition de causalité temporelle doit être respectée dans ce calcul.

$$(5) \quad \Delta t_j^k = h(S_k(j))$$

$$(6) \quad t_{j+1}^k = t_j^k + \Delta t_j^k$$

- * La relation (2) est une relation **dynamique** qui relie des variables d'un même noeud à des dates différentes.
- * Les relations (1), (3), (4), (5) sont des relations **instantanées**
- * Les relations (1), (5) reliant les variables de deux noeuds contigus ne sont pas vérifiées véritablement instantanément car les dates t_j^k et t_j^{k-1} d'une part et t_j^k et t_j^{k+1} d'autre part sont légèrement différentes. **Le schéma numérique introduit un effet dynamique qui n'existe pas dans la réalité.**

La date t_{j+1}^k est la dernière date connue de la grille k associée à la canalisation k et la date t_j^k est la dernière date à laquelle on a calculé le débit dans la canalisation k , si on connaissait le débit à la date t_{j-1}^k , on connaîtrait le pas Δt_{j+1}^k et donc la date t_{j+2}^k (cf. la relation (6)) et t_{j+1}^k ne serait plus la dernière date connue.

II.2.3. Expression des conditions de causalité temporelle à respecter au cours des calculs

• Calcul de la température $\theta_k^*(t)$

Il faut connaître la température à la dernière abscisse de la canalisation amont $k-1$ au moins jusqu'à la date t .

Soit t_j^{k-1} la dernière date pour laquelle on connaît les températures aller pour la canalisation $k-1$.

- * Soit on ne connaît pas le débit dans le canal $k-1$ à la date t_j^{k-1} ($\Rightarrow t_j^{k-1} = t_{j_k^{k-1}}^{k-1}$).

La condition de causalité est: (7) $t \leq t_j^{k-1} \Leftrightarrow t \leq t_{j_k^{k-1}}^{k-1}$

- * Soit on connaît le débit dans le canal $k-1$ à la date t_j^{k-1} ($\Rightarrow t_j^{k-1} + \Delta t_j^{k-1} \leq t_{j_k^{k-1}}^{k-1}$), dans ce cas on suppose que les températures associées à la canalisation $k-1$ ont été calculées en t_j^{k-1} et elles sont constantes (prises à leur valeur en t_j^{k-1}) sur l'intervalle $[t_j^{k-1}, t_j^{k-1} + \Delta t_j^{k-1}]$.

La condition de causalité est: (7) $t < t_j^{k-1} + \Delta t_j^{k-1}$

• calcul du débit $S_k(t)$

Il faut connaître le débit aval S_{k+1} et le débit Q_{k+1} dans l'échangeur $k+1$ au moins jusqu'à la date t .

Soit la dernière date à laquelle on connaît les débits dans le canal $k+1$: $t_j^{k+1} = t_k^{k+1}$

La condition de causalité est: (8) $t < t_j^{k+1} + \Delta t_{j_k}^{k+1} = t_{j_k+1}^{k+1}$

Nous proposons de décrire un algorithme qui organise le calcul des variables dans le réseau en tenant compte de ces conditions de causalité temporelle à respecter.

Notons que ce problème est nouveau, propre à ce schéma qui ne construit pas de grilles temporelles identiques sur tout le réseau.

II.2.4. Remarque sur le calcul des températures retour et des différences de pressions

Les seules variables qui interviennent dans la construction des grilles temporelles et qui sont fondamentales dans la propagation des calculs d'un noeud k au noeud amont $k-1$ ou aval $k+1$ sont les températures dans les canalisations aller et les débits.

Les **températures retour** peuvent être calculées de manière indépendante, après que le calcul des températures aller, des débits, des dates t_j^k ait été effectué. Elles peuvent aussi se calculer en même temps que les débits canaux; en effet dans le calcul de la température retour à la première abscisse de la canalisation retour, une condition de causalité temporelle, identique à celles existant sur le débit canal, apparaît:

$$(9) \quad \bar{T}_k(1,j) = \bar{T}_{k+1}(M_{k+1,j}^n) \cdot \frac{S_{k+1}(j^n)}{S_k(j)} + \theta_{k+1}(j^n) \cdot \frac{Q_{k+1}(j^n)}{S_k(j)}$$

$$(10) \quad \bar{T}_k(i,j) = FR_k(\bar{T}_k(i-1,j-1), S_k(j-1), \Delta t_{j-1}^k) - (1-\lambda_k \Delta t_{j-1}^k) \bar{T}_k(i-1,j-1) \\ = (1-\lambda_k \frac{\Delta x_k}{\alpha_k S_k(j-1)}) \bar{T}_k(i-1,j-1)$$

Les **différences de pressions** peuvent de même être calculées de manière indépendante après le calcul des températures aller, des débits, des dates t_j^k . En optimisation, elles peuvent aussi se calculer en même temps que les températures aller; elles ont été initialisées en chaufferie et elles se propagent dans le réseau de la chaufferie vers les "feuilles"; dans ce calcul la condition de causalité temporelle est identique à celle qui existe dans le calcul de $\theta_k^2(j)$.

$$(11) \quad \Delta p_k(j) = \Delta p_{k-1}(j') \quad (r_{k-1}^A + r_{k-1}^T) S_{k-1}(j')$$

II.2.5. Description d'un algorithme de calcul des variables d'état, températures et débits

• Phase d'initialisation : $K=0$

La première date de chaque grille est identique, initialisée à $t_0^k = 0, \forall k = 0, \dots, N_{\text{soe}}$.

Les états températures sont des données du problème pour cette première date commune, et les débits en sont déduits. La connaissance des débits dans chacune des canalisations permet le calcul des premiers pas de chaque grille: $\Delta t_0^k, \forall k = 0, N_{\text{soe}}$ et le calcul de la dernière date calculée de chaque grille devient $t_1^k = t_0^k + \Delta t_0^k$.

Pour $K = 0$, pour les nouvelles dates t_1^k ($t_{j_k^*+1}^k$ avec $j_k^* = 0$), on ne connaît encore aucun état.

• Premier pas d'algorithme : $K=1$

On recherche le noeud k tel que $t_i^k = \text{Min}(t_i^j), i = 0, \dots, N_{k-1}$.

A la date t_i^k le calcul de $\theta_k^k(1)$ est possible, en effet la condition (7) ($t_i^k < t_{j_k^*+1}^k = t_{j_k^*+1}^{k-1}$) est vérifiée par la définition de t_i^k .

De plus $t_0^{k+1} < t_i^k < t_{j_k^*+1}^k$ donc $\theta_k^k(1) = T_{k-1}(M_{k-1}, 0)$, autrement dit $\theta_k^k(j_k^*+1) = T_{k-1}(M_{k-1}, j_k^*)$.

A la date t_i^k le calcul de $S_k(1)$ est possible, en effet la condition (8) ($t_i^k < t_{j_k^*+1}^k = t_{j_k^*+1}^{k+1}$) est vérifiée par la définition de t_i^k .

De plus $t_0^{k+1} < t_i^k < t_{j_k^*+1}^k$, donc $S_k(1) = Q_{k+1}(0) + S_{k+1}(0)$, autrement dit

$$S_k(j_k^*+1) = Q_{k+1}(j_k^*+1) + S_{k+1}(j_k^*+1).$$

On calcule les états complets en t_i^k pour le noeud k .

On calcule le nouveau pas Δt_1^k

On calcule la nouvelle date $\Delta t_2^k = \Delta t_{j_k^*+1}^k$

On remet à jour j_k^* pour le noeud k : $j_k^* = j_k^*+1$.

Comme en $K = 0$, pour les nouvelles dates $t_{j_k^*+1}^k$, on ne connaît encore aucun état.

• K ième pas d'algorithme : $K (***)$

$$K = K(0) + K(1) + \dots + K(k) + \dots + K(N_{\text{soe}})$$

avec $K(k) = j_k^*$, qui définit la date $t_{j_k^*+1}^k$, dernière date connue sur la grille k .

On recherche le noeud k tel que $t_{j_k^*+1}^k = \text{Min}(t_{j_i^*+1}^i), i = 0, \dots, N_{\text{soe}}$.

- A la date t_{jk+1}^k , le calcul de $\theta_k^*(j_k^*+1)$ est possible, en effet la condition (7) ($t_{jk+1}^k < t_{jk+1}^{k-1}$) est vérifiée par la définition de t_{jk+1}^k .
De plus $t_j^{k-1} < t_{jk+1}^k$ (sinon le calcul des états en t_{jk+1}^k se serait fait avant le calcul des états en t_{jk+1}^{k-1} par la règle de recherche de la date t_{jk+1}^k toujours minimum), donc $\theta_k^*(j_k^*+1) = T_{k-1}(M_{k-1}, j_{k-1}^*)$.
- A la date t_{jk+1}^k , le calcul de $S_k(j_k^*+1)$ est possible, en effet la condition (8) ($t_{jk+1}^k < t_{jk+1}^{k+1}$) est vérifiée par la définition de t_{jk+1}^k .
De plus $t_{jk+1}^{k+1} < t_{jk+1}^k$ (pour la même raison que $t_{jk+1}^{k-1} < t_{jk+1}^k$), donc
 $S_k(j_k^*+1) = S_{k+1}(j_{k+1}^*) + Q_{k+1}(j_{k+1}^*)$.
On calcule les états complets en t_{jk+1}^k pour le noeud k.
- On calcule le nouveau pas Δt_{jk+1}^k .
- On calcule la nouvelle date $t_{jk+2}^k = t_{jk+1}^k + \Delta t_{jk+1}^k$.
- On remet à jour j_k^* pour le noeud k : $j_k^* = j_k^*+1$.
Comme en $K=0$, pour les nouvelles dates t_{jk+1}^k , on ne connaît encore aucun état.
- Si $t_{jk+1}^k > T_f$ on arrête l'algorithme.
Si $t_{jk+1}^k \leq T_f$ on continue, on incrémente K ($K = K + 1$), on repart en (***).

Remarque 1:

Avec ce choix d'organisation de calculs des variables pour le noeud k à la date t_{jk+1}^k avec $t_{jk+1}^k = \min(t_{jk+1}^i)$, $i = 0, \dots, N_{\text{aer}}$ on voit que les deux conditions de causalité (7) et (8) sont vérifiées en même temps, donc on peut calculer $\theta_k^*(j_k^*+1)$ puis $S_k(j_k^*+1)$ ou l'inverse.

Remarque 2:

En optimisation, on calcule les différences de pression qu'on propage de la chaufferie vers les feuilles, au cours de ce même algorithme.

II.2.6. Calcul des différences de pression en simulation

On effectue leur calcul en trois étapes, après le calcul des températures et débits. Ce calcul ressemble au calcul des différences de pression pour le schéma décentré, ou le calcul en régime statique.

On initialise les différences de pression aux "feuilles" avec le niveau minimum pour y assurer les débits calculés dans les échangeurs (vanne grande ouverte: $\Delta p_k = R_k \cdot Q_k^2$).

On propage un calcul des différences de pression des noeuds "feuilles" vers le noeud chaudière, pour obtenir les niveaux minimum utiles en chaudière pour que les contraintes en pression aux échangeurs puissent être satisfaites (cf. le passage consacré à ce calcul dans le cas du schéma décentré).

Dans le cas du premier schéma, nous n'avons pas de problème de causalité temporelle à respecter dans les calculs, les propagations des différences de pression d'un noeud à l'autre se font toujours par des relations statiques à la même date t_j .

Dans le cas du deuxième schéma, il faut tenir compte du fait que dans la réalité, les différences de pression se déduisent dans le réseau de la différence de pression en chaudière.

Pour calculer la différence de pression en un noeud $k+1$, la connaissant en son noeud père k , on comptabilise les pertes linéiques et singulières dans le canal k , on obtient la relation statique maintenant bien connue:

$$(12) \quad \Delta p_{k+1}(t) = \Delta p_k(t) \quad (r_k^* + r_k^s) S_k^2(t)$$

qui devient en discret:

$$(13) \quad \Delta p_{k+1}(i) = \Delta p_k(j) \quad (r_k^* + r_k^s) S_k^2(j) \text{ avec } t_j^k \leq t_i^{k+1} < t_j^{k+1} \text{ et } \Delta t_j^k = t_{j+1}^k$$

On recherche l'intervalle $[t_j^k, t_{j+1}^k]$ sur la grille temporelle k où situer la date t_i^{k+1} sur la grille temporelle $k+1$ pour laquelle $\Delta p_{k+1}(i)$ se déduit de $\Delta p_k(j)$.

On calcule $\Delta p_k(j)$ par (13) inversée.

On retient dans une variable auxillaire μ_k le niveau dont il faut remonter la différence de pression au noeud k , si elle ne suffit pas à satisfaire la contrainte à l'échangeur k :

$$(14) \quad \mu_k(t) = \text{Max}\{\mu_{k+1}(t), R_k Q_k^2(t) - \Delta p_k(t)\}$$

qui devient en discret:

$$(15) \quad \mu_k(j) = \text{Max}\{\mu_{k+1}(i), R_k Q_k^2(j) - \Delta p_k(i)\} \text{ avec } t_j^k \leq t_i^{k+1} < t_{j+1}^k$$

On obtient à la suite de ces calculs les différences de pression minimum utiles en chaudière pour pouvoir satisfaire les contraintes en pression aux échangeurs en relevant les niveaux $\Delta p_0(j)$ des niveaux $\mu_0(j)$

Pour obtenir la véritable carte des différences de pression admissibles dans le réseau, on reprend les différences de pression calculées et on les remonte de la quantité $\mu_0(j)$ en tenant compte des différences d'indices sur les grilles.

II.3. Particularités du deuxième schéma

Pour ce deuxième schéma, comme il n'y a pas coïncidence entre les grilles de discrétisation temporelle des différents tronçons, on vient de voir que cela introduit quelques difficultés dans les calculs ou des phénomènes numériques particuliers. Nous allons évoquer quelques aspects de ces phénomènes numériques.

II.3.1. Transformations des relations statiques existant à travers le réseau

- Nous savons que les équations (1) vérifiées par les températures aller au départ d'un canal et les équations (4) vérifiées par les débits sont des **relations statiques**, c'est à dire qu'elles sont dans la réalité vérifiées à tout instant à travers tout le réseau:

$$\begin{aligned}\theta_k(t) &= T_{k-1}(M_{k-1}, t) & \forall t, \forall k \\ S_k(t) &= S_{k+1}(t) + Q_{k+1}(t) & \forall t, \forall k\end{aligned}$$

- Avec le schéma particulier, elles sont vérifiées à chaque date d'échantillonnage t_j^k d'une grille k , où on effectue un calcul de $\theta_k(j)$ ou $Q_k(j)$, entre le noeud k et le noeud amont $k-1$ qui intervient dans la relation (1), ou entre le noeud k et le noeud aval $k+1$ qui intervient dans la relation (4):

$$\begin{aligned}\theta_k(j) &= T_{k-1}(M_{k-1}, j') & \text{avec } t_j^{k-1} \leq t_j^k < t_j^{k-1} + \Delta t_j^{k-1} \\ S_k(j) &= S_{k+1}(j'') + Q_{k+1}(j'') & \text{avec } t_j^{k+1} \leq t_j^k < t_j^{k+1} + \Delta t_j^{k+1}\end{aligned}$$

Que se passe-t-il entre ces dates d'échantillonnages?

sur $[t_j^{k-1}, t_j^k]$, la relation 1 n'est pas encore vérifiée, elle ne l'est qu'à partir de la date t_j^k .

sur $[t_j^{k+1}, t_j^k]$, la relation 4 n'est pas encore vérifiée, elle ne l'est qu'à partir de la date t_j^k .

On voit apparaître une dynamique temporelle dans la réalisation de ces relations.

Les relations, dont les calculs se propagent dans l'espace de la chaufferie vers les noeuds feuilles ne se vérifient plus statiquement mais avec un retard croissant dans le sens de la propagation (il en est de même pour les relations dont les calculs se propagent dans l'espace des noeuds feuilles vers la chaufferie.)

- Il n'est même plus toujours possible de trouver une date t , et une suite de débits $S_k(t)$ et $Q_k(t)$ qui vérifient (4) pour tous les noeuds du réseau.

Prenons l'exemple de trois noeuds consécutifs $k-1$, k , $k+1$.

La relation statique (4) donne:

$$\begin{aligned} S_{k-1}(t) &= S_k(t) + Q_k(t) && \text{ceci } \forall t \\ &= S_{k+1}(t) + Q_{k+1}(t) + Q_k(t) \end{aligned}$$

Avec le schéma particulier:

$$\begin{aligned} S_{k-1}(j) &= S_k(j') + Q_k(j') && \text{avec } t_j^k \leq t_j^{k-1} < t_j^k + \Delta t_j^k \\ S_k(j') &= S_{k+1}(j'') + Q_{k+1}(j'') && \text{avec } t_j^{k+1} \leq t_j^k < t_j^{k+1} + \Delta t_j^k \end{aligned}$$

Sur l'exemple suivant:

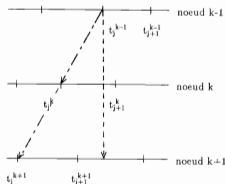


Figure 21

$$\begin{aligned} S_{k-1}(j) &= S_k(j') + Q_k(j') \\ &= S_{k+1}(j'') + Q_{k+1}(j'') + Q_k(j') \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} S_{k-1}(t_j^{k-1}) &= S_k(t_j^{k-1}) + Q_k(t_j^{k-1}) \\ &\neq S_{k+1}(t_j^{k-1}) + Q_{k+1}(t_j^{k-1}) + Q_k(t_j^{k-1}) \end{aligned}$$

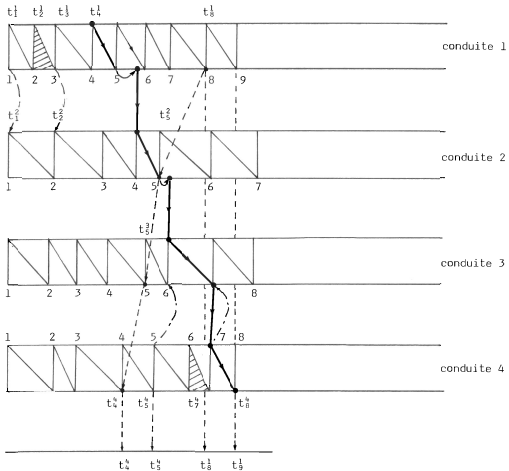
- Illustrons l'effet de dynamique temporelle introduite par le schéma particulier sur une figure simplifiée du réseau.

Nous schématisons un tronçon par un tuyau réduit, qui ne contiendrait qu'un pas en espace; les pas en temps sont construits de telle sorte qu'une caractéristique relie un pas en espace i à une date j au pas suivant $i+1$ à la date $j+1$; sur notre schématisation, une caractéristique relie donc l'origine de la canalisation à une date j à l'extrémité de cette canalisation à la date $j+1$.

Regardons la Figure 22 à la page suivante et faisons quelques remarques:

Calcul du débit: dans la canalisation 1 à la date t_0^1 le débit est construit à l'aide du débit dans la canalisation 2 à la date t_0^2 , du débit dans la canalisation 3 à la date t_0^3 , du débit dans la canalisation 4 à la date t_0^4 . On remarque que les intervalles $[t_0^j, t_0^j + \Delta t_0^j]$ et $[t_0^k, t_0^k + \Delta t_0^k]$ n'ont aucune date commune, ainsi on ne peut pas trouver de date $t \in [t_0^j, t_0^j + \Delta t_0^j]$, telle que $S_k(t) = S_{k+1}(t) + Q_{k+1}(t) \forall k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Calcul des températures dans les canalisations aller: la température au bout de la canalisation 4 en t_0^4 , se déduit de la température au départ de la canalisation 1 à la date t_0^1 . S'il n'y avait pas l'effet de retard introduit par le schéma, cette température se déduirait de la température à la date t_0^1 (bien sûr moyennant l'approximation faite sur l'inclinaison des caractéristiques dans le réseau par le schéma particulière.)



- - - - - - → suivi du calcul du débit S_1 (t_8^1) (de t_4^1 à t_8^1)
- ———— → suivi du calcul de température T_4 (M_4 , t_8^4) (de t_4^1 à t_8^4)
- . - . - . → calcul de températures sur 2 intervalles successifs pour la conduite 2
- . . . - . → calcul de débits sur 2 intervalles successifs pour la conduite 3

Figure 22

II.3.2. Effets de pas de temps de tailles très différentes dans les grilles temporelles de deux noeuds contigus

Reprenons l'exemple de la Figure 22.

La température au départ de la canalisation 2 aux dates t_1^2 et t_2^2 se déduit respectivement de la température à la fin de la canalisation 1 aux dates t_1^1 et t_3^1 . Les températures dans la canalisation 1 à la date t_2^1 n'interviennent dans aucun calcul de température pour la canalisation 2, donc pour aucun des canalisations suivants non plus. De même les débits dans la canalisation 3 aux dates t_6^3 et t_7^3 se calculent à partir des débits dans la canalisation 4 et l'échangeur 4 aux dates t_6^4 et t_7^4 . Les débits à la date t_6^4 pour le noeud 4 ne servent pas au calcul d'autres débits dans le réseau.

Ainsi on voit qu'il est préférable d'avoir des pas de temps sensiblement de même taille pour toutes les canalisations, pour qu'il n'y ait pas trop de perte d'information en passant d'une canalisation à l'autre, ou des calculs répétés avec des informations toujours identiques. **Inutile donc de raffiner la discrétisation dans une canalisation k si pour la canalisation aval k+1 ou amont k-1, on garde des pas trop larges.**

On ne maîtrise pas parfaitement la taille des pas de temps puisqu'ils sont construits par le programme; cependant selon l'ordre de grandeur des débits et leur écart d'un canal à l'autre, on peut choisir des pas en espace plus ou moins fins qui forcent les pas en temps à être plus ou moins larges.

II.3.3. Evaluation de la demande totale instantanée sur le réseau utile au calcul du coût thermique

Dans le calcul du coût thermique on peut choisir de comptabiliser toute l'énergie fournie au réseau (pertes, consommations aux différents noeuds), ou de ne comptabiliser que les pertes intégrées sur l'intervalle d'étude à travers le réseau. Il faut dans ce cas savoir intégrer les consommations aux différents noeuds sur l'intervalle d'étude et les soustraire de l'énergie totale fournie au réseau.

Pour ne comptabiliser que les pertes du réseau, on peut calculer la consommation totale sur le réseau instantanée $W_{tot}(t_j)$ et l'intégrer de la même manière que les coûts instantanés électriques et thermiques puis la soustraire du coût thermique. Il revient au même de soustraire cette consommation totale instantanée du coût thermique instantané et d'intégrer ensuite ce nouveau coût thermique instantané.

On a rentré, en données du problème, les courbes de demande à chaque sous-station. Pour connaître $W_{tot}(t_j)$, on somme chacune des demandes aux sous-stations, calculées sur les courbes de demandes.

- Dans le cas du premier schéma, on calcule cette demande instantanée globale pour chaque date d'échantillonnage t_j .

Supposons que la courbe de demande ait un saut à la date t sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, à l'échangeur k . On ne satisfait pas cette demande à cet échangeur sur l'intervalle $[t, t_{j+1}]$, puisqu'on fait l'approximation que les états sont toujours constants sur $[t_j, t_{j+1}]$, égaux à leur valeur calculée en t_j , et en t_j le débit échangeur a été calculé pour la demande correspondante en t_j avant le saut.

Mais ceci ne se voit pas sur le calcul du coût thermique, car celui-ci est calculé en t_j il utilise la valeur de la demande en t_j avec le débit échangeur correspondant, et en t_{j+1} et utilise la valeur de la demande en t_{j+1} avec le débit échangeur correspondant.

- Dans le cas du deuxième schéma, on calcule cette demande instantanée globale pour chaque date d'échantillonnage t_j^0 de la grille temporelle à la chaufferie.

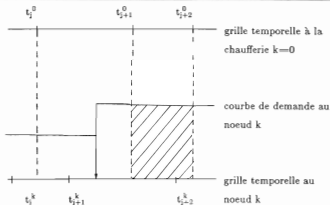


Figure 23

Supposons que la courbe ait un saut à la date t sur l'intervalle $[t_{j+1}^k, t_{j+2}^k]$, à l'échangeur k . On ne satisfait pas cette demande à cet échangeur sur l'intervalle $[t, t_{j+2}^k]$, puisqu'on fait l'approximation que les états k sont constants sur $[t_{j+1}^k, t_{j+2}^k]$.

Le calcul du coût en t_{j+1}^k utilise la valeur de la demande à l'échangeur k à cette date, donc calculée après le saut et les états à l'échangeur k calculés pour la date t_{j+1}^k , donc calculés avant le saut.

Dans le calcul du coût, cette non-coïncidence entre les dates auxquelles on évalue les demandes et les dates auxquelles on évalue les états fait qu'on prend en compte *des retards, dus à la discrétisation, sur la satisfaction des demandes aux sous-stations.*

III. Schéma particulière.

Nous avons vu au chapitre IV que les particules sont des portions de fluide de longueur variable (en espace et au cours du temps) qui se suivent pour remplir les canalisations. Elles se propagent, se déforment, changent de niveau thermique au cours du temps. Il n'y a pas de continuité thermique d'une particule à l'autre. On suit **dans l'espace et le temps l'évolution de chacune des discontinuités en température pouvant exister dans le réseau**, ainsi que les nouvelles discontinuités qui peuvent apparaître dans le réseau auxquelles sont alors associées de nouvelles particules.

Notons qu'il **apparaît alors un phénomène de multiplication très important des particules dans le réseau** qu'on ne voyait pas dans l'étude à une canalisation.

En effet si on suit chaque discontinuité sur les températures, quand une particule circule dans les canalisations aller, elle se duplique dès qu'elle passe devant un échangeur k , une des particules entre dans l'échangeur k et crée une particule sortant de l'échangeur k , une des particules entre dans la canalisation aval $k+1$.

De même une particule qui circule dans les canalisations retour, dès qu'elle arrive à un échangeur k , se recombine avec la particule sortant de l'échangeur k pour donner une nouvelle particule au départ de canalisation amont $k-1$, mais pendant tout le temps où cette particule défile à la sortie de l'échangeur, elle se recombine avec toute nouvelle particule sortant de l'échangeur pour donner d'autres nouvelles particules.

Ainsi, si rigoureusement, à toute nouvelle discontinuité sur la température on associe une nouvelle particule, on accroît de manière inacceptable le nombre de particules dans le réseau.

C'est pourquoi on décide de ne pas créer une nouvelle particule systématiquement avec chaque discontinuité. **Nous avons fait les choix suivants:**

- ☐ Chaque particule aller arrivant à un échangeur se duplique, mais la particule entrant dans l'échangeur ne prend pas véritablement vie.
- ☐ En effet on ne renvoie une nouvelle particule au départ d'une canalisation retour $k-1$ qu'à chaque top d'horloge. Cette particule est la représentante de toutes les particules qui sont arrivées à la sortie de l'échangeur k pendant le pas d'horloge et qui se sont mélangées à toutes les particules qui sont arrivées à l'extrémité de la canalisation k pendant le même pas d'horloge.

Décrivons maintenant précisément la discrétisation utilisée pour ce schéma, et l'organisation des calculs qui consistent essentiellement à suivre les particules, et qui suit comme dans le cas du schéma décentré le déroulement du phénomène physique modélisé.

III.1. Choix d'une discrétisation

- **Initialisation:**

Pour la première date t_0 , une répartition dans l'espace et un choix des particules à travers le réseau est choisie arbitrairement.

- **Dates d'échantillonnage en temps:**

Comme dans le cas à une seule canalisation, on choisit de **faire entrer dans le réseau une particule au niveau chaufferie, à cadence régulière, à chaque date t_0 espacée d'un pas d'horloge Δt_0 .**

Mais les dates d'échantillonnages en temps ne se réduisent pas à ces "tops d'horloge" elles sont de différents types, on a vu au chapitre IV qu'elles peuvent dépendre soit de données du problème (donc peuvent dans ce cas être connues à l'avance), soit de l'évolution des particules dans le réseau (et donc ne peuvent être connues à l'avance), elles sont alors calculées en même temps que les autres variables dans le réseau.

Nous énumérons maintenant les différents types de dates d'échantillonnage en temps t^3 , que nous avons retenus et qui n'apparaissent pas forcément dans le cas à une canalisation:

- **tops réguliers d'horloge** (ce sont des données du problème)

à ces dates on introduit une nouvelle particule à la chaufferie et on agrège des particules sortie échangeur et canalisation retour pour former de nouvelles particules au départ des canalisations retour.

Dates de variation brutale de demande à un échangeur (ce sont des données du problème)

à ces dates la température à la sortie de l'échangeur ainsi que le débit dans l'échangeur k peuvent varier brutalement et par conséquence les débits dans les canalisations amont peuvent changer aussi.

Dates d'arrivée d'une particule aller à un échangeur k

cette particule est la représentation d'une discontinuité en température, donc la température à la sortie de l'échangeur ainsi que le débit dans l'échangeur k varient. Par conséquence les débits dans les canalisations amont varient aussi.

- **Dates d'arrivée d'une particule retour à un échangeur k**

III.2. Organisation des calculs

- Comme dans le schéma aux différences finies, **les calculs se mènent pas de temps après pas de temps.**

Pour chaque date t_j , les débits servant dans les calculs de la propagation des particules sont les débits calculés au pas t_{j-1} .

- **Les calculs se propagent dans l'espace dans le sens réel de l'écoulement du fluide** c'est à dire de la première canalisation aller partant de la chaufferie vers la dernière canalisation allant vers une feuille puis dans le sens inverse sur les canalisations retour.

Nous allons étudier précisément comment on suit l'évolution en espace des particules ainsi que leur niveau thermique.

Le calcul des autres variables, à partir des relations instantanées s'en déduit facilement, puisque comme dans le cas du schéma décentré les dates d'échantillonnages sont identiques pour toutes les variables du réseau.

III.2.1. Suivi de la position d'une particule entre deux dates d'échantillonnage

Définissons déjà précisément comment on définit la position d'une particule dans le réseau, ce qui requiert un peu plus d'information que dans le cas à une seule canalisation.

- **La longueur d'une particule est variable au cours du temps.**

Elle peut subir des déformations au passage d'une canalisation à l'autre où les débits sont différents. On ne garde pas en mémoire explicitement cette longueur, elle peut-être reconstituée à partir de la connaissance des positions des particules.

- **La position d'une particule dans une canalisation est donnée par la position du début de la particule**, c'est à dire l'abscisse de la partie de la particule la plus en aval dans le réseau dans le sens écoulement du fluide.

Cette position est caractérisée par l'indexation donnant la canalisation à laquelle la particule appartient, et l'abscisse du début de la particule dans cette canalisation.

La longueur de la particule est alors connue grâce à l'abscisse de la particule suivante dans le sens écoulement du fluide (c'est-à-dire la particule en amont ou "côté chaufferie" pour une particule des conduites aller, la particule en aval ou "côté feuille" pour une particule des conduites retour.

- **Cas particuliers:** Enumérons les cas où la position d'une particule n'est pas définie tout à fait de cette manière.

→ Si le début d'une particule est dans une section $k+1$ et la fin dans une section k , la particule est indexée comme appartenant à la canalisation $k+1$.

Au niveau de l'échangeur $k+1$, la température à son entrée est donnée par le suivi du niveau thermique de la partie de cette particule encore dans la section k , qui défile devant l'échangeur.

→ Quand une particule "aller" atteint un échangeur k qui se trouve à un noeud feuille, le début de la particule ne peut être considéré comme passant dans la canalisation suivante. Il faut cependant conserver les caractéristiques thermiques de cette particule qui défile pendant un certain temps à l'entrée de l'échangeur. On peut considérer que cette particule a quitté la section amont $k-1$ (elle n'y est plus comptabilisée) mais ses caractéristiques thermiques sont conservées dans une variable

pouvant représenter la température au début d'une section fictive k partant de la feuille ou la température à l'entrée de l'échangeur k.

- Quand une particule "retour" atteint un échangeur k quelconque, elle se mélange à des particules venant de la sortie échangeur et repart dans la section amont k-1 selon une loi qu'on explicitera plus loin. On considère que cette particule a quitté la section k. On conserve ses caractéristiques thermiques en mémoire dans une variable représentant la température retour à l'échangeur k, durant le laps de temps où cette particule défile.

- **Evolution de la position X d'une particule dans une canalisation k entre deux dates d'échantillonnages t_j et t_{j+1} .**

On a vu en détail au chapitre IV comment entre deux dates d'échantillonnage t_j , t_{j+1} on suit l'évolution d'une particule sur sa caractéristique:

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + w_k^j \cdot (t_{j+1} - t_j) \\ w_k^j &= \text{vitesse dans la canalisation k à la date } t_j. \end{aligned} \quad (V.61)$$

III.2.2. Suivi du niveau thermique d'une particule

Nous allons reprendre chacun des cas que nous avons évoqués à propos du repérage de la position d'une particule.

- **1° cas: Une particule aller ou retour est entièrement dans la même canalisation k et reste dans la même canalisation k entre deux dates t_j et t_{j+1} .**

On a vu en détail au chapitre IV qu'une particule se déplaçant sur une caractéristique subit une perte thermique exponentielle comme suit:

$$T_{j+1} = T_j e^{-\lambda_k(t_{j+1}-t_j)} = T_j e^{-\lambda_k(X_{j+1}-X_j)/w_k^j} \approx T_j (1-\lambda_k(t_{j+1}-t_j)) \quad (V.62)$$

- **2° cas: Une particule aller est à cheval sur deux canalisations indicées 1 et 2 (les coefficients de pertes thermiques des deux canalisations sont respectivement λ_1 et λ_2).**

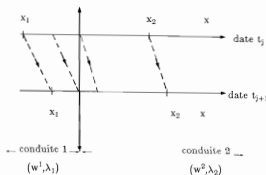


Figure 24

- En t_j la particule est à la "température moyenne" T_j et elle s'étend de x_1 à x_2 . En t_{j+1} la particule est à la "température moyenne" T_{j+1} et elle s'étend de x'_1 à x'_2
- Un point de la particule situé en x à la date t_j se trouve en $x' = x + \delta x$ à la date t_{j+1} . Il peut soit être resté dans la même canalisation 1 ou 2, soit être passé de la canalisation 1 à la canalisation 2 et passer de la température T_j à T_{j+1}

pour $x \in [x_1, x_2]$ vérifiant $x' = x + w_j^1 (t_{j+1} - t_j) < L_1$

$$\text{on a } \begin{cases} \delta x = w_j^1 (t_{j+1} - t_j) \\ T_{j+1}' = T_j e^{-\lambda_1(t_{j+1} - t_j)} \end{cases}$$

pour $x \in [L_1, x_2]$ vérifiant $x' = x + w_j^2 (t_{j+1} - t_j)$

$$\text{on a } \begin{cases} \delta x = w_j^2 (t_{j+1} - t_j) \\ T_{j+1}' = T_j e^{-\lambda_2(t_{j+1} - t_j)} \end{cases}$$

pour $x \in [x_1, L_1]$ vérifiant $x + w_j^1 (t_{j+1} - t_j) < L_1$, on peut calculer la date t où ce point passe d'une canalisation à l'autre.

$$\text{on a } \begin{cases} t = t_j + (x - L_1)/w_j^1 \\ \delta x = w_j^1 (t - t_j) + w_j^2 (t_{j+1} - t) \\ x = x + \delta x \\ T_{j+1}' = T_j e^{-\lambda_1(t - t_j)} e^{-\lambda_2(t_{j+1} - t)} \end{cases}$$

→ Pour calculer la température T_{j+1} on effectue la moyenne des températures T_{j+1}^x sur $[x_1, x_2]$.

$$T_{j+1} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} T_{j+1}^x dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx} = \frac{\int_{x_1+w_j(t_{j+1}-t_j)}^{x_2+w_j(t_{j+1}-t_j)} T_{j+1}^x dx}{\int_{x_1+w_j(t_{j+1}-t_j)}^{x_2+w_j(t_{j+1}-t_j)} dx}$$

$$T_{j+1} = T_j \left[\frac{1 - (t_{j+1} - t_j)}{(x_2 + w_j(t_{j+1} - t_j))} \frac{\lambda_1(L_1 - x_1) + \lambda_2(x_2 - L_1)}{(x_1 + w_j(t_{j+1} - t_j))} \right] \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (V.63)$$

$$T_{j+1} \approx T_j [1 - \lambda_1(t_{j+1} - t_j)] \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \quad (V.64)$$

→ **Remarque:** la température aller à l'entrée de l'échangeur 2 à la date t_{j+1} n'est pas prise comme étant le niveau de cette particule à cheval sur 1 et 2, elle est le niveau de la portion de particule qui défile devant l'échangeur et qui est encore dans la canalisation 1.

$$\theta_k^x(j+1) = \theta_k^x(j) e^{-\lambda_1(t_{j+1}-t_j)} \approx \theta_k^x(j) (1 - \lambda_1(t_{j+1}-t_j)) \quad (V.65)$$

- **3° cas: Une particule aller a atteint un échangeur à un noeud feuille et défile dans l'échangeur, ou une particule retour a atteint un échangeur.**

Durant le laps de temps où cette particule s'écoule, on peut soit négliger ses pertes thermiques, soit les comptabiliser et remettre à jour son niveau thermique par la même formule que dans le 1° cas, à chaque date d'échantillonnage t_j .

- **4° cas: Une nouvelle particule entre depuis le dernier top d'horloge à la chaufferie.**

A une date d'échantillonnage t_j intermédiaire entre ce dernier top d'horloge et le suivant, on peut voir l'évolution thermique de cette particule de deux manières. Soit on considère que la portion de la particule qui était déjà dans le réseau en t_{j-1} a subit des pertes thermiques, qui peuvent être négligées ou pas (cette portion de particule n'existe pas si t_{j-1} est le dernier top d'horloge), et que la portion de la particule qui est entrée entre t_{j-1} et dans le réseau, est entrée à la même température qu'au dernier top d'horloge. Dans ce cas le niveau thermique global de la particule, mis à part les pertes thermiques, ne change pas à cette date t_j .

Soit on considère que la portion de la particule qui était déjà dans le réseau en t_{j-1} a subit des pertes thermiques et que la portion de la particule qui est entrée entre t_{j-1} et t_j dans le réseau, a pu entrer à une température différente de celle du dernier top d'horloge. Dans ce cas le niveau thermique global de cette particule change à cette date t_j . Cette deuxième solution est adoptée mais faisons quelques remarques.

- * **Première solution:** elle consiste à prendre entre deux tops d'horloge, la température sortie chaufferie, c'est à dire la commande, comme constante. La classe de la fonction commande est alors une fonction continue par morceaux, sur les intervalles de temps définis par l'horloge; à chaque discontinuité est associée une particule qui entre dans le réseau. Mais ceci empêche de donner un sens aux commandes aux dates t_j , intermédiaires entre deux tops d'horloge, elles ne sont pas libres, elles sont ramenées au niveau du dernier top d'horloge.

- * **Deuxième solution:** elle consiste à prendre en compte pour les dates intermédiaires d'échantillonnages entre deux tops d'horloge les discontinuités sur la commande, mais à ne pas envoyer de particule à ces dates, à former une particule dont le niveau thermique global "moyenne" ces discontinuités. La fonction commande est une fonction continue par morceaux sur les intervalles de temps $[t_j, t_{j+1}]$; le schéma particulaire transforme cette fonction en une fonction continue par morceaux sur les intervalles de temps définis par l'horloge, à l'entrée du réseau.

- Soit $t_j = t_{b_j}$, qui est le $j^{\text{ème}}$ pas d'échantillonnage et en même temps un top d'horloge
Soit $t_{b_{j+1}}$, le top d'horloge suivant

- En t_{j+1} la particule entrante couvre l'intervalle $[0, x_1 = w_j^{-1} (t_{j+1} - t_j)]$

$$\text{Si } u_j \text{ est la commande à la date } t_j, T_{j+1} = \frac{\int_0^{x_1} u_j e^{-\lambda_1 x / w_j} dx}{\int_0^{x_1} dx}$$

- Soit $t_j \in [t_{b_j}, t_{b_{j+1}}]$, la particule entrante couvre l'intervalle $[0, x_1]$

$$\text{En } t_{j-1} \text{ la particule entrante couvre l'intervalle } [0, x_1 + w_j^{-1} (t_{j-1} - t_j)]$$

Son niveau thermique est calculé par une formule de moyenne (u_j étant la commande en température à la chaufferie à la date t_j)

$$T_{j+1} = \frac{x_1 (1 - \lambda_1 (t_{j+1} - t_j)) T_j + w_j^{-1} (t_{j+1} - t_j) u_j}{x_1 + w_j^{-1} (t_{j+1} - t_j)}$$

- 5° cas: A chaque top d'horloge, au départ d'une canalisation retour k c'est à dire au niveau du mélange entre sortie échangeur $k+1$ et arrivée d'une canalisation retour $k+1$, on renvoie une particule.

Cette particule a un niveau thermique qui est calculé de manière à respecter un bilan énergétique au niveau du mélange.

Soit $t_j = t_{b_j}$ un top d'horloge et en même temps la $j^{\text{ème}}$ date d'échantillonnage.

Soit $t_{j+1} = t_{b_{j+1}}$ le top d'horloge suivant et en même temps la $(j+1)^{\text{ème}}$ date d'échantillonnage.

il y a donc l dates d'échantillonnages entre t_{b_j} et $t_{b_{j+1}}$.

Soit $\theta'_{k+1}(m)$, la température à la sortie échangeur $k+1$ à la date m

- Soit Q_{k+1}^m , le débit dans l'échangeur $k+1$ à la date m
- Soit $\theta_{k+1}^l(m)$, la température arrivée d'une canalisation retour à la date m
- Soit S_{k+1}^m , le débit dans la canalisation retour $k+1$ à la date m
- Soit S_k^m , le débit dans la canalisation retour k à la date m

La particule retour envoyée dans la canalisation k à la date $t_{h_p} = t_{j+1}$ est à la température $\theta_k(j+1)$ calculé de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \theta_k(j+1) & \left[\sum_{m=0}^{l-1} S_k^{j+m} (t_{j+m+1} - t_{j+m}) \right] \\ & = \sum_{m=0}^{l-1} \left[\{ \theta_{k+1}^l(j+m) Q_{k+1}^{j+m} + \theta_{k+1}^l(j+m) S_{k+1}^{j+m} \} (t_{j+m+1} - t_{j+m}) \right] \end{aligned} \quad (V.65)$$

Remarque: on fait le même genre d'agrégation de particules au départ d'une canalisation retour situé avant un embranchement k . Les particules agrégées sont les particules venant de la sortie de l'échangeur k , et les particules venant des tuyaux retour fils $\bar{0}$ ou $\bar{0}$. La formule (V.65) est modifiée par ajout d'un terme supplémentaire correspondant aux particules venant d'une canalisation $\bar{0}$ ou $\bar{0}$.

III.2.3. Calcul des autres variables du réseau

Comme on l'a déjà dit, aucun problème particulier n'apparaît. A une date d'échantillonnage t_p selon son type, certaines variables comme des débits, des températures sorties échangeurs sont à recalculer et on le fait grâce aux relations statiques.

Le calcul des pressions peut se faire, indépendamment après le calcul des autres variables. On procède selon les trois étapes décrites pour le schéma décentré.



CHAPITRE VI

OPTIMISATION DU PROBLEME

I. Ecriture du problème de minimisation en dimension infinie

L'optimisation du fonctionnement du système en régime dynamique consiste à calculer deux fonctionnelles de commande $u_1(t)(= \theta_0^*(t))$ et $u_2(t)(= \Delta p_0(t))$, appartenant à une classe choisie de fonctions qui minimisent un critère, fonction de $u_1(t), u_2(t)$ et de variables intermédiaires $X(x, t)$, $Y(t)$ fonctions implicites des commandes, intégré sur une période choisie, le système étant soumis à certaines contraintes, elles-mêmes fonctions de $u_1(t), u_2(t)$ et $X(x, t)$, $Y(t)$.

• Critère

Il s'agit de l'intégration sur une période donnée $[0, T_f]$ du coût de fonctionnement du système qui comprend le coût électrique et le coût thermique (II.16):

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^{T_f} (J_e(t) + J_{th}(t)) dt \\ &= \int_0^{T_f} J_e(t, u_2(t), Q_{th}(t)) dt + \int_0^{T_f} J_{th}(t, Q_{th}(t), u_1(t), \theta_0^*(t)) dt \end{aligned}$$

• Commandes

On a vu au chapitre IV, qu'on a choisi des fonctions commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de type $L^2([0, T_f])$

• Contraintes

Nous avons cité dans le chapitre II et le chapitre III certaines contraintes du problème, ces contraintes existent en régime statique et deviennent des fonctions temporelles en régime dynamique, qui doivent être satisfaites à chaque date t .

- contrainte en température à la chaufferie

$$\theta_{max}^h \geq u_1(t) = \theta_0^*(t) \geq \theta_0^f(t)$$

contraintes en température aux échangeurs

$$\theta_k^*(t) \geq f_k(W_k(t)) \quad \forall k = 1, \dots, N_{aoc}$$

- contraintes en différence de pression aux échangeurs

$$\Delta p_k(t) \geq R_k Q_k^2(t) = g_k(t) \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{aex}}$$

- Contraintes finales

Si on ne se donne aucune contrainte sur l'état thermique dans lequel on souhaite trouver le réseau en temps final T_f , l'algorithme d'optimisation cherche à faire entrer dans le réseau, dans les temps précédant le temps final T_f , de l'eau à basse température. En effet le coût thermique correspondant à ces basses températures est plus faible, et les débits qui peuvent résulter de cette baisse de température, qui sont plus importants et qui peuvent pénaliser le coût électrique, n'apparaissent qu'avec un retard sur la commande à la chaufferie et donc peuvent intervenir après le temps final et ne pas pénaliser le critère.

Réfléchissons à ce problème d'étude du système sur un horizon fini

De manière générale, pour tout système fonctionnant en continu, il n'est pas justifié a priori de poser le problème sur un horizon fini. Bien sûr, du point de vue pratique, il évidemment souhaitable de limiter l'horizon d'étude. On a recours généralement pour cela à l'une des idées suivantes:

→ **On recherche des conditions de fonctionnement périodiques** et on se limite à l'étude du système sur une période.

Dans notre problème, les données extérieures (demandes, tarifs électriques) ne présentent pas de périodicité plus courte que 24 heures, ce qui est déjà très long pour une étude du régime dynamique.

→ **On peut démontrer l'existence d'un "horizon de planification"**, c'est-à-dire prouver qu'il existe deux dates t_1 et t_2 ($t_2 < t_1$) telles que si on pose le problème sur $[0, T_f]$ avec $T_f > t_1$, alors la stratégie optimale restreinte à $[0, t_2]$ ne dépend plus de T_f . Intuitivement c'est ce que l'on s'attend à vérifier sur un réseau dans la mesure où une "particule" de fluide lâchée à la chaufferie n'a plus d'influence sur le futur au-delà du temps maximal que met cette particule à parcourir le réseau en sens aller puis retour, et ce temps est fini si les débits ne s'approchent pas de zéro.

Cependant, cette approche imposerait d'étudier le problème sur un intervalle de temps sensiblement plus long que la période "utile" et imposerait d'ignorer les résultats obtenus vers la fin de l'horizon. Ce surplus de calculs serait d'autant plus lourd que le réseau étudié serait plus long. Cela poserait aussi les problèmes d'extrapolation de la prévision de la demande aux sous-stations au-delà de la période utile.

→ **On peut imposer des conditions de raccordement "raisonnables" entre les horizons successifs d'étude du régime dynamique.**

C'est cette troisième voie que nous avons choisie dans notre étude, en pensant notamment à l'étude du raccordement de deux régimes stationnaires par un régime transitoire optimal.

On peut définir ces conditions de raccordement par une contrainte finale sur l'horizon choisi (ou de façon duale par un coût final, mais en fonction des remarques qui suivent, on va voir qu'un coût final risque de ne pas être assez contraignant).

Cette contrainte finale sur l'horizon T_f pourrait être définie de deux manières différentes:

- * On peut imposer que les profils de températures dans les canalisations à T_f soient égaux à des profils choisis, c'est-à-dire que pour chaque canalisation k on impose une contrainte en toute abscisse de la canalisation

$$\text{température aller: } T_k(x, T_f) = T_c^k(x) \quad \forall x \in [0, L_k], \quad \forall k$$

$$\text{température retour: } \bar{T}_k(x, T_f) = \bar{T}_c^k(x) \quad \forall x \in [0, L_k], \quad \forall k$$

T_c^k et \bar{T}_c^k sont deux fonctions consignées.

- * On peut imposer qu'en moyenne les profils de températures dans les canalisations soient égaux à des profils moyens choisis, c'est-à-dire que pour chaque canalisation k on impose:

$$\text{canalisation aller: } \int_0^{L_k} T_k(x, T_f) dx = T_c^k \quad \forall k$$

$$\text{canalisation retour: } \int_0^{L_k} \bar{T}_k(x, T_f) dx = \bar{T}_c^k \quad \forall k$$

T_c^k et \bar{T}_c^k sont des profils moyens de consigne.

Cette deuxième formulation peut être comprise comme le calcul d'un état thermique moyen final des canalisations qu'on souhaite ramener à un état thermique donné. Nous n'avons pas retenu cette formulation, car l'algorithme d'optimisation tend effectivement à satisfaire en moyenne ce profil mais avec les températures aller (respectivement retour) aux abscisses proches de L_k plus grandes que T_c^k (respectivement \bar{T}_c^k) et aux abscisses proches de 0 plus basses que T_c^k (respectivement \bar{T}_c^k),

Cela signifie que le phénomène de baisse de température avant T_f n'est pas de cette manière, totalement maîtrisé.

• Variables d'états du problème

Nous avons vu que le critère $J(u) = J(u_1(t), u_2(t))$ ne s'écrit pas simplement en fonction de $u_1(t)$ et $u_2(t)$, mais il fait intervenir des relations implicites existant à travers le réseau, au travers de variables $X(x, t)$ ou $Y(t)$. Le nombre de ces variables d'états varie selon la manière de résoudre le problème comme nous le verrons ultérieurement.

- Le problème de minimisation se pose donc comme suit:

$$\begin{aligned} \text{Min } J(u(t)) &= \int_0^{T_f} J_d(t, u_d(t), Q_d(t)) dt + \int_0^{T_f} J_k(t, Q_d(t), u_k(t), \theta_d^k(t)) dt \\ \left\{ \begin{array}{l} u_d(t) = \theta_d^d(t) \\ u_k(t) = \Delta p_d(t) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{VI.Pb1})$$

Sous les contraintes:

$$\begin{aligned} \theta_{\max}^d &\geq u_1(t) = \theta_0^d(t) & \forall t \\ u_1(t) &= \theta_0^d(t) \geq \theta_0^f(t) & (\text{ou } \phi_1(t) \leq 0) \quad \forall t \\ \theta_2^k(t) &\geq f_k(W_k(t)) & (\text{ou } \phi_2(t) \leq 0) \quad \forall t, \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}} \\ \Delta p_k(t) &\geq g_k(Q_k(t)) & (\text{ou } \phi_3(t) \leq 0) \quad \forall t, \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}} \\ -T_k(x, T_f) &= T_c^k(x) & (\text{ou } \phi_4(t) = 0) \quad \forall x, \forall k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \\ \bar{T}_k(x, T_f) &= \bar{T}_c^k(x) & (\text{ou } \phi_5(t) = 0) \quad \forall x, \forall k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \end{aligned}$$

De nombreuses difficultés apparaissent quand on cherche à étudier le problème en dimension infinie. D'une part les expressions analytiques que nous avons données au chapitre IV pour la solution de l'équation de transport dans une canalisation se compliquent singulièrement quand plusieurs canalisation se succèdent, (le bouclage par le débit sur une canalisation k , fait intervenir tous les débits en aval, donc des composées des températures sur toutes les canalisation en aval).

D'autre part nous avons choisi des classes de fonctions de commandes $u(t) \in L^2([0, T_f])$ (cette classe répond en effet aux besoins du problème). Mais comme nous l'avons déjà fait remarquer au chapitre IV, l'intégration de cette commande par l'équation de transport pour obtenir les variables d'états du problème n'apporte aucune régularité sur ces états, ils appartiennent à $L^2([0, L] \times [0, T_f])$ ou $L^2([0, T_f])$.

Cela pose différents types de problèmes:

On peut se demander quel sens donner aux dérivées partielles des variables d'états $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial t}$ et dans quel sens l'équation de la dynamique est satisfaite (pour presque tout x et t). On peut se demander quelle est alors la topologie duale à adopter pour les variables d'états adjointes.

De même on peut se demander dans quel sens les contraintes d'états (inégalités) peuvent être satisfaites, et si elles sont dualisées, quelle est la topologie duale à adopter.

Pour les contraintes sur la commande, on n'a pas de problème puisqu'on ne les dualise pas, mais qu'on utilise une projection sur un domaine admissible.

Quand nous avons écrit le problème en dimension infinie, nous nous sommes heurtés à ce genre de difficultés.

Devant ces difficultés théoriques, nous adoptons une approche heuristique et pragmatique. **Nous étudions le problème en dimension finie.** Pour cela dès le début de l'étude nous remplaçons chaque fonctionnelle en temps, ou en espace, ou les deux par une suite de variables discrètes, chacune représentant une approximation de la fonction exacte sur un point du maillage défini en temps ou espace. On écrit le critère du problème en dimension finie, qui est la discrétisation du critère $J(u(t))$, en fonction des nouvelles variables discrètes du problème. On écrit les contraintes du problème qui doivent être satisfaites sur les points de maillage. On cherche alors à calculer la suite des variables discrètes qui composent la commande, telles qu'elles minimisent le critère discret en satisfaisant les contraintes discrètes. On a remplacé le problème (VI.Pb1) par un problème de minimisation non linéaire avec contraintes, fonction de P variables.

II. Etude du problème de minimisation en dimension finie

Nous allons reprendre en détail le principe de la minimisation du problème (VI.Pb1) en dimension finie en nous appuyant sur l'exemple de la première méthode de discrétisation des fonctionnelles et de l'équation de transport par le schéma décentré.

Nous donnerons ensuite les différences apparues lorsque nous utilisons un autre schéma pour l'équation de transport.

II.1. Discrétisation des fonctionnelles

Nous avons décrit cette discrétisation aux chapitres IV et V.

Très brièvement rappelons que:

une fonction du temps $f(t)$ de $L^2([0, T_f])$ représentant une variable quelconque dans le réseau est approchée par une fonction constante par morceaux sur des intervalles $[t_j, t_{j+1}[$ de pas Δt .

On peut la représenter par la suite des variables discrètes:

$$\{f(0), f(1), \dots, f(j), \dots, f(N)\}$$

une fonction de l'espace $f(x)$ de $L^2([0, L_k])$ représentant une variable associée au noeud k du réseau est approchée par une fonction constante par morceaux sur les intervalles $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ de pas Δx_k .

On peut la représenter par la suite des variables discrètes:

$$\{f(0), f(1), \dots, f(i), \dots, f(M_k)\}$$

une fonction du temps et de l'espace $f(x, t)$ de $L^2([0, T_f], L^2([0, L_k]))$ représentant une variable associée au noeud k du réseau (température aller ou retour) est approchée par une fonction constante sur des pavés $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^a, t^{a+1}]$ (Cf. chapitre V pour le détail).

On peut la représenter par la suite des variables discrètes:

$$\{f(0,0), \dots, f(0,j), \dots, f(0,N), f(1,0), \dots, f(1,j), \dots, f(1,N), \dots,$$

$$f(i,0), \dots, f(i,j), \dots, f(i,N), \dots, f(M_k,0), \dots, f(M_k,j), \dots, f(M_k,N)\}$$

II.2. Discretisation du critère

J est une forme intégrale qu'on peut approximer par une méthode des trapèzes ou des rectangles, et écrire en fonction des variables discrètes.

- Si $t_N = T_f$, la **méthode des trapèzes** donne l'expression:

$$\begin{aligned} J_d = & 0,5 \left[J_s(t_0, \Delta p_0(0), Q_0(0)) + J_{ab}(t_0, Q_0(0), \theta_0^N(0), \theta_0^Z(0)) \right] \Delta t \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \left[J_s(t_j, \Delta p_0(j), Q_0(j)) + J_{ab}(t_j, Q_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^Z(j)) \right] \Delta t \\ & + 0,5 \left[J_s(t_N, \Delta p_0(N), Q_0(N)) + J_{ab}(t_N, Q_0(N), \theta_0^N(N), \theta_0^Z(N)) \right] \Delta t \end{aligned} \quad (VI.66)$$

Si $t_{N-1} < T_f < t_N$, la **méthode des trapèzes** donne l'expression:

$$\begin{aligned} J_d = & 0,5 \left[J_s(t_0, \Delta p_0(0), Q_0(0)) + J_{ab}(t_0, Q_0(0), \theta_0^N(0), \theta_0^Z(0)) \right] \Delta t \\ & + \sum_{j=1}^{N-2} \left[J_s(t_j, \Delta p_0(j), Q_0(j)) + J_{ab}(t_j, Q_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^Z(j)) \right] \Delta t \\ & + \left[J_s(t_{N-1}, \Delta p_0(N-1), Q_0(N-1)) + J_{ab}(t_{N-1}, Q_0(N-1), \theta_0^N(N-1), \theta_0^Z(N-1)) \right] (T_f - t_{N-1}) \end{aligned} \quad (VI.66bis)$$

- Si $t_N = T_f$, la **méthode des rectangles** donne l'expression:

$$J_d = \sum_{j=0}^{N-1} \left[J_s(t_j, \Delta p_0(j), Q_0(j)) + J_{ab}(t_j, Q_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^Z(j)) \right] \Delta t \quad (VI.67)$$

Si $t_{N-1} < T_f < t_N$, la **méthode des rectangles** donne l'expression:

$$\begin{aligned} J_d = & \sum_{j=0}^{N-2} \left[J_s(t_j, \Delta p_0(j), Q_0(j)) + J_{ab}(t_j, Q_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^Z(j)) \right] \Delta t \\ & \left[J_s(t_{N-1}, \Delta p_0(N-1), Q_0(N-1)) + J_{ab}(t_{N-1}, Q_0(N-1), \theta_0^N(N-1), \theta_0^Z(N-1)) \right] (T_f - t_{N-1}) \end{aligned} \quad (VI.67bis)$$

II.3. Ecriture des équations de fonctionnement du système

Dans le chapitre V sur la simulation du réseau, on a donné les équations discrètes ("dynamiques" ou "instantanées") que vérifient les variables discrètes à travers le réseau.

II.4. Variables données du problème et variables d'état du problème

- Le profil initial des températures est donné dans chaque canalisation, donc les variables discrètes correspondantes sont des données du problème ainsi que les autres variables (débits, différences de pression) qui se calculent uniquement à partir de celles-ci et qui ne font pas intervenir directement ou indirectement la commande. Sur la Figure 25 les variables températures qui sont des données du problème sont marquées d'une croix, les débits correspondants sont aussi des données.
- A une date t_j , l'ensemble de ces variables d'état du système doit parfaitement décrire le système et la connaissance des équations d'état permettre d'en déduire son évolution ultérieure.

Dans le cas d'étude du schéma décentré, les variables d'état du problème sont les suivantes:

- les températures aller T et retour \bar{T} aux points de maillage.

$$\begin{array}{lll} T_0(i,j) & \forall i = j, \dots, M_0 & \forall j = 1, \dots, M_0 \\ & \forall i = 0, \dots, M_0 & \forall j = M_0 + 1, \dots, N \\ T_k(i,j) & \forall i = 0, \dots, M_k & \forall j = M_0 + 1, \dots, N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}} \\ \bar{T}_k(i,j) & \forall i = 0, \dots, M_k & \forall j = M_0 + 1, \dots, N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}} \end{array}$$

- les débits dans les échangeurs et dans les canalisations

$$\begin{array}{lll} Q_k(j) & \forall j = M_0 + 1, \dots, N & \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}} \\ S_k(j) & \forall j = M_0 + 1, \dots, N & \forall k = 0, \dots, N_{\text{soe}} \end{array}$$

- la température à la sortie des échangeurs

$$\theta'_k(j) \quad \forall j = M_0 + 1, \dots, N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{soe}}$$

les différences de pressions à travers le réseau

$$\Delta p_k(j) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \forall k = 0, \dots, N_{\text{soe}}$$

Les variables θ'_k , S_k , Q_k , Δp_k ne sont pas strictement des variables d'état puisque les débits Q_k , S_k , la température θ'_k peuvent être calculés à partir de la connaissance des températures à l'entrée des échangeurs et que les différences de pression Δp_k peuvent être calculés à partir de la connaissance des débits.

Mais on a vu que les relations instantanées, qui relient ces variables, sont non explicites et sont récurrentes dans l'espace sur le numéro des noeuds comme le sont les relations sur les températures T et \bar{T} sur les indices en temps.

Autrement dit, on traite sur le même plan les relations véritablement dynamiques (récurrence sur le temps) et les relations statiques (récurrence sur l'espace).

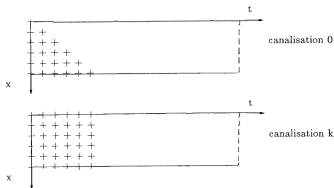


Figure 25

II.5. Discrétisation des contraintes

Les contraintes sont vérifiées par les variables discrètes, donc en certains points de maillage du temps ou de l'espace.

On ne peut imposer des contraintes que sur les variables d'états ou sur la commande du problème et pas sur les données du problème, c'est pourquoi sur certains types de variables les contraintes en temps n'interviennent qu'à partir des dates t_j hors du cône de dépendance numérique des conditions initiales.

- contraintes en température à la chaufferie

$$\theta_{\max}^a \leq u_1(j) = \theta_0^a(j) \geq \theta_0^f(j) \quad \forall j = 1, \dots, N$$

- contraintes en température aux échangeurs

$$\theta_k^N(j) \geq t_k(W_k(j)) \quad \forall j = M_0+1, \dots, N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{aex}}$$

- contraintes en différences de pression aux échangeurs

$$\Delta p_k(j) \geq R_k Q_k^2(j) = g_k(Q_k(j)) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{aex}}$$

- contraintes finales sur les températures aller:

$$T_k(i, N) = T_c^k(i) \quad \forall i = 0, \dots, M_k \quad j = N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{aex}}$$

- contraintes finales sur les températures retour:

$$\bar{T}_k(i, N) = \bar{T}_c^k(i) \quad \forall i = 0, \dots, M_k \quad j = N \quad \forall k = 1, \dots, N_{\text{aex}}$$

II.6. Ecriture du problème en discret

En adoptant l'écriture (IV.66) du coût intégral discret, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Min } J_d &= 0,5 \left[J_e(t_0, \Delta p_0(0), Q_0(0)) + J_{th}(t_0, Q_0(0), \theta_0^N(0), \theta_0^N(0)) \right] \Delta t \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u_1^j, \quad u_2^j \\ u_3^j, \quad u_4^j \end{array} \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} \left[J_e(t_j, \Delta p_0(j), Q_0(j)) + J_{th}(t_j, Q_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^N(j)) \right] \Delta t \\ &+ 0,5 \left[J_e(t_N, \Delta p_0(N), Q_0(N)) + J_{th}(t_N, Q_0(N), \theta_0^N(N), \theta_0^N(N)) \right] \Delta t \end{aligned}$$

Sous les contraintes de type 1:

$$\begin{aligned}
u_1(j) &= \theta_0^2(j) \geq \theta_0^1(j) & \forall j &= 1, \dots, N & k &= 0 \\
(\text{ou } \phi_0(j) &\leq 0) \\
\theta_k^2(j) &= T_k(0, j) \geq f_k(W_k(j)) & \forall j &= M_0+1, \dots, N & \forall k &= 1, \dots, N_{\text{doe}} \\
(\text{ou } \phi_k^2(j) &\leq 0) \\
\Delta p_k(j) &\geq g_k(Q_k(j)) & \forall j &= 1, \dots, N & \forall k &= 1, \dots, N_{\text{doe}} \\
(\text{ou } \phi_k^3(j) &\leq 0) \\
T_k(i, N) &= T_{\epsilon}^k(i) & j &= N & \forall i &= 0, \dots, M_k \quad \forall k = 0, \dots, N_{\text{doe}} \\
(\text{ou } \phi_k^4(i) &= 0) \\
\bar{T}_k(i, N) &= \bar{T}_{\epsilon}^k(i) & j &= N & \forall i &= 0, \dots, M_k \quad \forall k = 0, \dots, N_{\text{doe}} \\
(\text{ou } \phi_k^5(i) &= 0)
\end{aligned}$$

Sous les contraintes de type 2:

Ce sont toutes les équations d'états ("dynamiques" ou "statiques") reliant toutes les variables du réseau.

Sous les contraintes de type 3:

$\theta_0^{\Delta_{\text{max}}} \geq u_1(j)$; ce ne sont pas des contraintes sur les variables d'états, mais sur la commande en température à la chaufferie.

Remarque 1:

- * **Les contraintes de type 1** sont des contraintes qu'on ne va pas chercher à satisfaire à chaque pas d'un algorithme d'optimisation. **Ce sont des contraintes que nous dualisons, qui doivent être satisfaites à l'optimum.**
- * **Les contraintes de type 2** qui traduisent le fonctionnement du réseau et les relations existant entre toutes les variables du réseau, sont des contraintes qu'on va satisfaire à chaque pas d'un algorithme d'optimisation.

Elles ne sont pas dualisées. On peut dire qu'on cherche à résoudre le problème de minimisation dans un domaine X_{ad} , où X_{ad} représente l'ensemble possible des variables de commande. Quant aux variables d'états, elles ne sont que des intermédiaires de calcul à travers les relations de type 2.

- * Les contraintes de type 3 ne sont pas dualisées, elles entrent dans la définition du domaine X_{ad} , ensemble possible des variables de commande, et à chaque pas d'un algorithme d'optimisation, on effectue une projection des commandes sur X_{ad} .

On peut dire qu'on recherche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } J_d \\ \left\{ u_1^1, \dots, u_1^N \right\} \\ \left\{ u_1^1, \dots, u_1^N \right\} \\ \text{dans } X_{ad} \\ \text{sous les contraintes de type 1} \end{array} \right.$$

Remarque 2:

- * Nous n'avons pas d'hypothèse de convexité du coût.
- * Ion BRATASANU a montré dans le cas statique à une chaufferie une "convexité approximative" du coût, du moins l'absence de minima locaux en dehors du minimum global. Cette situation cesse d'ailleurs d'être vraie pour le cas de réseaux à plusieurs chaufferies.

III. Rapports généraux sur les méthodes de dualité

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques résultats sur le problème de minimisation non linéaires avec contraintes inégalités et contraintes égalités:

méthodes de résolution par méthode lagrangienne simple et problèmes dans le cas non convexe.

méthodes de résolution par méthode lagrangienne augmentée et application au cas non convexe.

Prenons le problème général suivant de minimisation sous contraintes inégalités et égalités, nommé **problème primal (P)**:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x), x \in X_{ad} \subset \mathbb{R}^n \\ \text{sous les contraintes} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \\ h_l(x) = 0 \quad l \in L = \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}$$

- Hypothèses: les fonctions f, g_i ($i \in I$), h_l ($l \in L$) sont supposées continûment différentiables. X_{ad} est l'ensemble des x admissibles.
- Pour simplifier l'écriture, on peut désigner par $g(x)$ (ou $h(x)$) le vecteur de dimension m (ou p), dont les composantes sont les valeurs $g_i(x)$ des contraintes inégalités (ou $h_l(x)$ des contraintes égalités).

III.1. Résolution du problème (P) par méthodes duales lagrangiennes simples

- Reprenons le problème (P) et à chaque contrainte g_i ($i \in I$) associons un nombre réel $\lambda_i \geq 0$, à chaque contrainte h_l ($l \in L$) un nombre réel μ_l sans contrainte de signe. λ_i, μ_l sont les **multiplicateurs de Lagrange** du problème:

On peut noter:

λ le vecteur ($\in (\mathbb{R}^m)^+$) de composantes λ_i

μ le vecteur ($\in \mathbb{R}^p$) de composantes μ_l

On définit la **fonction de Lagrange simple** du problème par:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) + \sum_{l \in L} \mu_l h_l(x) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle + \langle \mu, h(x) \rangle$$

Notre but est de remplacer le problème primal (P) de minimisation sous contraintes par une suite de problèmes d'optimisation sans contrainte. Pour cela nous allons donner une suite de résultats qui vont nous permettre de transformer le problème (P).

- Remarquons que si x^* est l'optimum du problème (P), il vérifie:

$$f(x^*) = \inf_{x \in X_{ad}} \sup_{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+, \mu \in \mathbb{R}^p} \{L(x, \lambda, \mu)\}$$

- Soit $\bar{x} \in X_{\text{ad}}$, $\bar{\lambda} \in (\mathbb{R}^m)^+$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$, on dit que $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ est un point col de $L(x, \lambda, \mu)$ s'il vérifie les deux inégalités:

$$(1) \quad L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \quad \forall x \in X_{\text{ad}}$$

$$(\quad L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \inf_{x \in X_{\text{ad}}} L(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \quad)$$

$$(2) \quad L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \mu) \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^p$$

$$(\quad L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \max_{\substack{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \mu) \quad)$$

- Pour un point-col $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ de $L(x, \lambda, \mu)$ on démontre que:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \max_{\substack{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \min_{x \in X_{\text{ad}}} L(x, \lambda, \mu) = \min_{x \in X_{\text{ad}}} \max_{\substack{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} L(x, \lambda, \mu)$$

d'où \bar{x} est solution du problème primal (P).

On en conclue la condition suffisante d'existence d'un optimum global \bar{x} pour le problème (P):

$$(3) \quad \left| \text{Si } L(x, \lambda, \mu) \text{ admet un point-col, } (\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}), \text{ alors } \bar{x} \text{ est optimum global de (P).} \right.$$

- **Réciproquement**, si le problème est convexe (f convexe, g_i convexes, h_i affines) et sous l'hypothèse de qualification des contraintes, il existe un point-col de L .

De plus, les deux inégalités caractérisant le point-col (1) et (2) sont équivalentes aux conditions de Kuhn et Tucker.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0 & \text{et} \\ h_i(\bar{x}) & = 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) & = 0 \\ g_i(\bar{x}) & \leq 0 \\ \lambda_i & \geq 0 \end{array} \right.$$

Sous une hypothèse de qualification des contraintes, ces conditions sont nécessaires même en dehors du cas convexe.

Le résultat (3) est valable pour f convexe ou non convexe, f, g_i, h_i différentiables ou non, X_{ad} quelconque. **Le problème est que, souvent dans le cas de problèmes non convexes, il peut ne pas exister de point-col.** C'est pourquoi dans le cas de tels problèmes, on introduit la notion de fonction de Lagrange généralisée (ex: fonction de Lagrange augmentée), que nous allons décrire par

la suite.

- On définit pour $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+$ la **fonction duale** $\omega(\lambda, \mu)$ par

$$\omega(\lambda, \mu) = \inf_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda, \mu)$$

avec l'hypothèse que pour tout $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+$ $\mu \in (\mathbb{R}^p)$ où $\omega(\lambda, \mu)$ a une valeur finie, il existe $\bar{x} \in X_{ad}$ tel que $\omega(\lambda, \mu) = L(\bar{x}, \lambda, \mu)$, on peut écrire:

$$\omega(\lambda, \mu) = \min_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda, \mu)$$

$\omega(\lambda, \mu)$ est une fonction concave de λ, μ , comme enveloppe inférieure d'une famille de fonctions affines en (λ, μ) .

- Si un point-col existe pour $L(x, \lambda, \mu)$, on sait qu'il donnera la solution \bar{x} au problème (P) et sa recherche peut se faire en résolvant le **problème dual (D)**:

$$\max_{\substack{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \omega(\lambda, \mu) = \max_{\substack{\lambda \in (\mathbb{R}^m)^+ \\ \mu \in \mathbb{R}^p}} \left\{ \min_{x \in X_{ad}} L(x, \lambda, \mu) \right\}$$

Cette recherche correspond bien à la résolution dans X_{ad} (c'est-à-dire qu'on respecte sur x des contraintes éventuelles non dualisées) d'une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes h ou g (contraintes dualisées).

Pour rechercher le maximum de la fonction duale, on utilise sa propriété de concavité par rapport aux variables λ et μ et la possibilité de calculer un sous-gradient de cette fonction par rapport aux variables λ et μ .

- Notons en effet la propriété suivante:

$$\text{Pour } \lambda \in (\mathbb{R}^m)^+, \mu \in \mathbb{R}^p \text{ soit } Y(\lambda, \mu) = \{y \in X_{ad} / f(y) + \lambda' g(x) + \mu' h(x) = \omega(\lambda, \mu)\}$$

alors pour tout $y \in Y(\lambda, \mu)$, $g(y)$ et $h(y)$ sont des sous-gradients de ω en λ et μ .

De plus si $Y(\lambda, \mu)$ est réduit à un point unique (si $L(\cdot, \lambda, \mu)$ est strictement convexe par exemple), alors ω est différentiable et $g(y)$, $h(y)$ sont des gradients de ω en λ et μ .

On utilise des méthodes classiques de gradient ou sous-gradient pour rechercher le maximum de $\omega(\lambda, \mu)$.

En résumé:

Si le problème (P) admet un point-col, la solution du problème dual (D) donne la solution du problème primal (P):

$$\text{Max(D)} = \omega(\lambda^*, \mu^*) = f(x^*) = \text{Min(P)}$$

A l'optimum si la fonction duale ω est différentiable, les gradients de ω par rapport à λ, μ en λ^*, μ^* sont $g(x^*)$ et $h(x^*)$

Si le problème (P) n'admet pas de point-col, la solution du problème dual (D) donne une solution inférieure à la solution du problème primal (P).

En effet de manière générale on a:

$$\text{Max}_{\lambda, \mu} \min_x L(x, \lambda, \mu) \leq \min_x \text{Max}_{\lambda, \mu} L(x, \lambda, \mu) \quad \text{donc} \quad \text{Max(D)} = \omega(\lambda^*, \mu^*) < f(x^*) = \text{Min(P)}$$

et $f(x^*) - \omega(\lambda^*, \mu^*)$ est dit **saut de dualité**.

La solution du problème dual dans ce cas n'apporte rien, on n'obtient pas une approchée de la solution x^* les contraintes dualisées peuvent ne pas être satisfaites.

Donnons deux algorithmes principaux de résolution du problème dual:

→ l'algorithme d'UZAWA

→ l'algorithme d'ARROW-HURWICZ

Algorithme d'UZAWA

A chaque pas de l'algorithme, k , pour des multiplicateurs λ^k (associés aux contraintes inégalités dualisées), et μ^k (associés aux contraintes égalités dualisées) fixés, on calcule complètement la fonction duale $\omega(\lambda^k, \mu^k)$.

Ainsi au cours de l'algorithme il est possible de suivre l'évolution de la fonction duale qui est concave par rapport à λ, μ . Les valeurs successives $\omega(\lambda^k, \mu^k)$ doivent croître de façon monotone pour un bon comportement de l'algorithme.

(a) On part d'une valeur $\lambda^0 > 0, \mu^0$

(b) à l'itération k , on est au point $\lambda^k \geq 0, \mu^k$

- on calcule la fonction duale $\omega(\lambda^k, \mu^k) = \min_{x \in X_M} \{ f(x) + \lambda^k g(x) + \mu^k h(x) \}$
 $= f(x^k) + \lambda^k g(x^k) + \mu^k h(x^k)$

(c) $g(x^k) = (g_i(x^k)) \quad i \in I$ sont des sous-gradients de la fonction duale ω au point λ^k, μ^k
 $h(x^k) = (h_i(x^k)) \quad i \in L$ (des gradients dans le cas différentiable)

- On définit de nouveaux multiplicateurs $\lambda^{k+1} \quad \mu^{k+1}$ par:

$$\lambda^{k+1} = \text{Max} \{0, \lambda^k + \rho^k g(x^k)\}$$

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \rho^k h(x^k)$$

avec ρ^k pas de déplacement à l'étape k .

(d) Si le test d'arrêt est vérifié: FIN

Sinon retour en (b)

Algorithme d'ARROW-HURWICZ

La différence avec l'algorithme d'Uzawa est qu'à chaque pas d'algorithme k , pour des multiplieurs λ^k et μ^k fixés, on ne calcule pas complètement la fonction duale $\omega(\lambda^k, \mu^k)$. On se contente d'effectuer un pas sur les variables primales x^k dans la direction $-\nabla_x L(x, \lambda^k, \mu^k)$, puis un pas sur les variables duales dans la direction $+\nabla_\lambda L(x^{k+1}, \lambda, \mu^k)$ ou $+\nabla_\mu L(x^{k+1}, \lambda^k, \mu)$.

L'inconvénient de cette méthode est que la fonction duale $\omega(\lambda, \mu)$ n'est jamais évaluée au cours de l'algorithme puisqu'on ne fait jamais de minimisation complète en x de la fonction de Lagrange à λ, μ fixé. On démontre que la distance euclidienne de (x^k, λ^k, μ^k) à leurs valeurs optimales (x^*, λ^*, μ^*) décroît pour un bon choix des pas sur les variables primales et duales (ϵ^k, ρ^k) , mais cette distance n'est évidemment pas évaluable pendant le déroulement de l'algorithme, l'optimum étant inconnu.

(a) on part d'une valeur $\lambda^0 \geq 0, \mu^0$

(b) à l'itération k , on est au point $\lambda^k \geq 0, \mu^k, x^k$

- on effectue un pas les variables primales dans la direction $-\nabla_x L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$

$$x^{k+1} = \Pi [x^k - \epsilon^k \nabla_x L(x^k, \lambda^k, \mu^k)]$$

avec ϵ^k : pas de déplacement à l'étape k et Π : projection sur X_{ad}

(c) $g(x^{k+1}) = (g_i(x^{k+1})) \quad i \in I$

$$= \nabla_\lambda L(x^{k+1}, \lambda, \mu^k)$$

$h(x^{k+1}) = (h_l(x^{k+1})) \quad l \in L$

$$= \nabla_\mu L(x^{k+1}, \lambda^k, \mu)$$

- On effectue un pas de gradient sur les variables duales, suivi d'une projection sur $(\mathbb{R}^s)^+$ pour la variable λ

$$\lambda^{k+1} = \text{Max} (0, \lambda^k + \rho^k g(x^{k+1}))$$

$$\mu^{k+1} = \mu^k + \rho^k h(x^{k+1})$$

avec ρ^k : pas de déplacement à l'étape k .

(d) Si le test d'arrêt est vérifié: FIN

Sinon retour en (b)

III.2. Résolution du problème (P) par méthodes duales lagrangiennes généralisées

Reprenons le problème (P) et à chaque contrainte inégalité g_i ($i \in I$) associons un nombre réel λ_i et un coefficient c_i^1 , à chaque contrainte égalité h_l ($l \in L$) un nombre μ_l et un coefficient c_l^2 .

- On définit la **fonction de Lagrange augmentée (Rockafellar (1974))** par:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i \in I} \Pi_{c_i^1}(g_i(x), \lambda_i) + \sum_{l \in L} \mu_l h_l(x) + c_l^2 h_l^2(x)/2$$

$$= f(x) + \Pi_{c^1}(g(x), \lambda) + \langle \mu, h(x) \rangle + \frac{c^2}{2} \|h(x)\|^2$$

$$\text{avec } \Pi_{c_i^1}(g_i(x), \lambda_i) = \frac{c_i^1}{2} \left\{ \text{Max} \left(0, g_i(x) + \frac{\lambda_i}{c_i^1} \right) \right\}^2 - \frac{\lambda_i^2}{2c_i^1}$$

$$\text{et } \|h(x)\|^2 = \langle h(x), h(x) \rangle$$

Nous allons montrer rapidement pourquoi dans le cas du lagrangien simple, s'il n'y a pas de point-col, on ne peut pas réduire le saut de dualité et pourquoi en choisissant convenablement les coefficients (dits de pénalisation c_i^1 et c_l^2) suffisamment grands, on peut trouver un point-col (local c'est-à-dire pour $x \in V(x^*) \cap X_{ad}$) pour le lagrangien augmenté et dans ce cas obtenir un minimum local du problème primal.

Prenons le cas simple d'un problème (P) avec **contraintes égalités** seulement.

Cas du Lagrangien simple:

→ Introduisons la **notion de fonction de perturbation** qui est le coût optimal $\phi(y)$ du problème perturbé (P_y) suivant:

$$(P_y): \begin{cases} \text{Min } f(x), x \in X_{ad} \\ \text{sous les contraintes} \\ h_l(x) = y_l \quad (l \in L) \end{cases}$$

Donnons quelques résultats sur $\phi(y)$ (Minoux (1983))

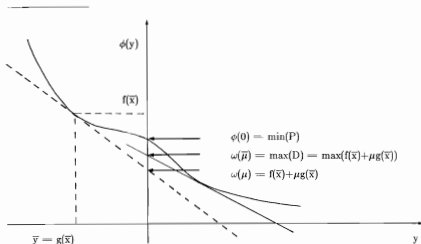
- * Si (P) a un optimum \bar{x} fini, $\bar{\mu}$ est un multiplicateur de point-col si et seulement si l'hyperplan d'équation $z = \phi(0) - \bar{\mu} y$ est un hyperplan d'appui en $y = 0$ de $\phi(y)$.

$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^m \quad \phi(y) \geq \phi(0) - \bar{\mu} y$$

- * Si on définit la fonction duale $\omega(\mu) = \min_{x \in X_{ad}} L(x, \mu)$, L étant le lagrangien simple, on montre que $\phi(y)$ est toujours au-dessus des droites de pente $-\mu$ passant à l'origine $y = 0$ en $\omega(\mu)$.

$$\Leftrightarrow \phi(y) \geq \omega(\mu) - \bar{\mu}y \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

- * La solution du problème dual $\{\max_{\mu \in \mathbb{R}^m} \omega(\mu)\}$ est l'ordonnée à l'origine maximale d'une telle droite.
- * On peut trouver un point-col, si on trouve une droite de pente $-\bar{\mu}$ passant à l'origine en $\omega(\bar{\mu})$ et tangente à $\phi(y)$ et on a alors $\omega(\bar{\mu}) = \phi(0) = \min(P)$.



Représentation pour y unidimensionnel

Figure 26

Dans le cas présent on ne peut pas trouver de point-col, le saut de dualité est $\phi(0) - \omega(\bar{\mu})$

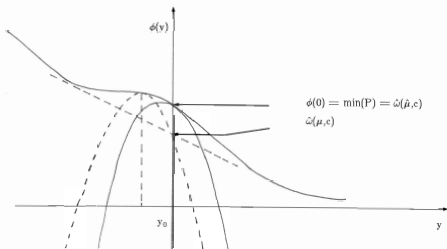
Cas du Lagrangien augmenté de Rockafellar (1974)

- Si on note $\hat{\omega}(\mu, c)$, la fonction duale augmentée correspondant au lagrangien augmenté, on montre que $\hat{\omega}(\mu, c)$ est l'ordonnée à l'origine $y = 0$ d'une parabole d'équation:

$$z = z^0 - \mu y - c \|y\|^2 \quad (c > 0)$$

située partout en dessous de la fonction $\phi(y)$ et tangente en y^0 au graphe de $\phi(y)$.

- * On peut trouver un point-col si la fonction $\phi(y)$ admet en $(y = 0, \phi(0))$ une fonction de support quadratique concave.



Représentation pour y unidimensionnel

Figure 27

Dans le cas présent on a pu trouver une parabole tangente à $\phi(y)$ en $\phi(0) = \min(P) = \hat{\omega}(\hat{\mu}, c)$.

Il est plus facile pour la fonction $\phi(y)$ de satisfaire ce genre de condition que celle requise dans le cas du lagrangien simple.

On voit aussi que la valeur de c joue un rôle important pour pouvoir trouver une parabole dont la concavité lui permet d'être tangente en $(y = 0, \phi(0))$ à $\phi(y)$.

Dans l'utilisation d'une méthode de Lagrange augmentée, on peut pour rechercher à résoudre le problème dual (D) et utiliser comme dans le cas de la méthode de Lagrange simple les algorithmes d'Uzawa ou d'Arrow-Hurwicz.

Calculons les gradients du Lagrangien augmenté par rapport aux variables duales λ_i et μ_i :

Contraintes égalités

$$\nabla_{\mu_i} L(x, \lambda, \mu) = h_i(x)$$

Contraintes inégalités

$$\nabla_{\lambda_i} L(x, \lambda, \mu) = \text{Max} \left(0, g_i(x) + \frac{\lambda_i}{c_i^1} \right) - \frac{\lambda_i}{c_i^1}$$

Remarque:

Quand à l'étape k des algorithmes, on effectue un pas sur les variables duales, on obtient:

$$\bullet \quad \mu_i^{k+1} = \mu_i^k + \rho^k h_i(x)$$

$$\bullet \quad \lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \rho^k \left\{ \left[\text{Max} \left(0, g_i(x) + \frac{\lambda_i^k}{c_i^1} \right) \right] - \frac{\lambda_i^k}{c_i^1} \right\}$$

$$\text{si le pas } \rho^k = c_i^1 \text{ on obtient } \lambda_i^{k+1} = \text{Max}[0, \lambda_i^k + \rho^k g_i(x)]$$

C'est-à-dire qu'on retrouve dans ce cas là, la même mise à jour que pour le cas de l'utilisation d'un lagrangien simple.

IV. Applications à notre problème

- Pour écrire les conditions d'optimalités du problème, nous utilisons l'exemple d'un réseau à deux branches (qui résume tous les cas possibles de réseaux) et nous indiquons les noeuds de la manière suivante (Figure 28):

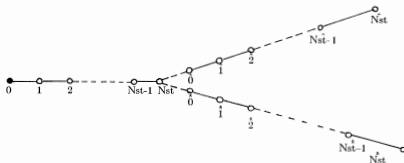


Figure 28

- Nous utilisons une méthode de lagrangien augmenté.
Pour chaque contrainte dualisée, nous introduisons les notations suivantes pour les variables duales et les coefficients de pénalisations

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{- contraintes à la chaufferie} & \theta_0^k(j) \geq \theta_0^k(j) & \forall j \rightarrow & \eta_0(j) \quad c_3 \\ \text{- contraintes aux échangeurs} & \theta_1^k(j) \geq f_k(W_k(j)) & \forall j \rightarrow & \mu_k(j) \quad c_2 \\ \text{contraintes en pression} & \Delta p_k(j) \geq g_k(Q_k(j)) & \forall j \rightarrow & \nu_k(j) \quad c_1 \\ \text{contraintes finales} & T_k(i, N) = T_c^k(i) & \forall i \rightarrow & p_{\alpha}^k(i) \quad ca^k \\ \text{contraintes finales} & \bar{T}_k(i, N) = \bar{T}_c^k(i) & \forall i \rightarrow & p_{\bar{\alpha}}^k(i) \quad cr^k \end{array} \right.$$

- On peut écrire la fonction de Lagrange augmentée du problème L.

Si on note λ un multiplicateur associé à la contrainte $\phi(x) (= y)$, c étant la constante de pénalisation du lagrangien augmenté, la fonction L comporte les termes suivants:

- pour les **contraintes égalités** ($\phi(x) = y = 0$): $\Psi_c(y, \lambda) = \lambda y + c \frac{y^2}{2}$
- pour les **contraintes inégalités** ($\phi(x) = y \leq 0$): $\Pi_c(y, \lambda) = \frac{c}{2} (\max(0, y + \frac{\lambda}{c}))^2 - \frac{\lambda}{2c}$

- Que l'on cherche à calculer complètement la fonction duale (utilisation de l'algorithme d'Uzawa) ou que l'on cherche à minimiser partiellement la fonction de Lagrange (utilisation de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz), **on est obligé de calculer le gradient de la fonction de Lagrange par rapport aux variables de commandes**. Ce calcul n'est pas aisé à cause des relations implicites existant dans le réseau. Pour cela nous introduisons un artifice de calcul, que nous exposons maintenant.

Posons le problème de manière générale.

- Soit une fonction $f(X, U)$ $X \in \mathbb{R}^p$
 $U \in \mathbb{R}^m$

on a des relations liant X et U : $X = g(X, U)$ qu'on peut aussi exprimer par: $X = \psi(U)$

On suppose l'existence et l'unicité de la solution X de l'équation implicite pour tout U

- On souhaite calculer $\frac{d}{dU} f(X, U)$, sous $X = g(X, U)$ ou $X = \psi(U)$

$$\frac{d}{dU} f(X, U) = f'_U(X, U) + f'_X(X, U) \cdot \psi'(U)$$

$$\text{et } \psi'(U) = g_X(X, U) \cdot \psi'(U) + g_U(X, U) \quad (1)$$

- Introduisons la variable p vérifiant: $p = p \cdot g_X(X, U) + f'_X(X, U)$ (2)

Multiplions $\begin{cases} (1) \text{ par } p \text{ à gauche} \\ (2) \text{ par } \psi' \text{ à droite} \end{cases}$

$$\begin{aligned} p \cdot \psi'(U) &= p \cdot g_X(X, U) \cdot \psi'(U) + p \cdot g_U(X, U) \\ &= p \cdot g_X(X, U) \cdot \psi'(U) + f'_X(X, U) \cdot \psi'(U) \end{aligned}$$

$$d' \text{ ou } f'_X(X, U) \cdot \psi'(U) = p \cdot g_U(X, U)$$

$$\text{et } \frac{d}{dU} f(X, U) = f'_U(X, U) + p \cdot g_U(X, U)$$

- Ainsi si on pose $L(X, U) = f(X, U) + p \cdot (g(X, U) - X)$

$$\text{on a } \frac{d}{dU} f(X, U) = \frac{\partial L}{\partial U}$$

$$\text{avec } p \text{ défini par } \frac{\partial L}{\partial X} = 0 = f'_X(X, U) + p \cdot g'_X(X, U) - p$$

- On peut donc écrire une nouvelle fonction L , étant la somme de la fonction de lagrange augmentée L_{λ} , et des termes du type $p(g(X,U)-X)$, p peut être nommée variable adjointe discrète associée à la contrainte d'état $g(X,U) = X$.

Nous donnons maintenant les notations utilisées pour les différentes **variables adjointes** associées aux différentes **équations d'état**:

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_k(i,j) = FA_k^i(T_k(i,j-1), T_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) & \rightarrow p_k(i,j) \\ -\bar{T}_k(i,j) = FR_k^i(\bar{T}_k(i,j-1), \bar{T}_k(i-1,j-1), S_k(j-1)) & \rightarrow \bar{p}_k(i,j) \\ -Q_k(j) = \Phi_k(T_k(1,j)) & \rightarrow \mu_k(j) \\ \theta'_k(j) = \Psi_k(T_k(1,j)) & \rightarrow \xi_k(j) \\ S_k(j) = S_{k+1}(j) + Q_{k+1}(j) & \rightarrow \nu_k(j) \\ \Delta p_k(j) = \Delta p_{k-1}(j) - \psi_{k-1}(\dots) & \rightarrow \delta_k(j) \end{array} \right.$$

IV.1. Ecriture du Lagrangien augmenté L_{λ}

$$\begin{aligned} L_{\lambda} = & \sum_{j=1}^{N-1} J_e(t_j, S_0(j), \Delta p_0(j)) \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ J_e(t_0, S_0(0), \Delta p_0(0)) + J_e(t_N, S_0(N), \Delta p_0(N)) \right\} \Delta t \\ & + \sum_{j=2}^{N-1} J_{\lambda}(t_j, S_0(j), \theta_0^M(j)), \theta_0^S(j) \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ J_{\lambda}(t_0, S_0(0), \theta_0^M(0), \theta_0^S(0)) + J_{\lambda}(t_N, S_0(N), \theta_0^M(N), \theta_0^S(N)) \right\} \Delta t \\ & + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[p_{\text{ca}}^k(i) (T_k(i,N) - T_e^k(i)) + \frac{c_{\text{a}}^k}{2} (T_k(i,N) - T_e^k(i))^2 \right] \right. \\ \text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[p_{\sigma}^k(i) (\bar{T}_k(i,N) - \bar{T}_e^k(i)) + \frac{c_{\sigma}^k}{2} (\bar{T}_k(i,N) - \bar{T}_e^k(i))^2 \right] \right\} \\ & + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{\text{ca}}^k(i) (\hat{T}_k(i,N) - \hat{T}_e^k(i)) + \frac{\hat{c}_{\text{a}}^k}{2} (\hat{T}_k(i,N) - \hat{T}_e^k(i))^2 \right] \right. \\ \text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{\sigma}^k(i) (\hat{\bar{T}}_k(i,N) - \hat{\bar{T}}_e^k(i)) + \frac{\hat{c}_{\sigma}^k}{2} (\hat{\bar{T}}_k(i,N) - \hat{\bar{T}}_e^k(i))^2 \right] \right\} \\ & + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{\text{ca}}^k(i) (\hat{T}_k(i,N) - \hat{T}_e^k(i)) + \frac{\hat{c}_{\text{a}}^k}{2} (\hat{T}_k(i,N) - \hat{T}_e^k(i))^2 \right] \right. \\ \text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{\sigma}^k(i) (\hat{\bar{T}}_k(i,N) - \hat{\bar{T}}_e^k(i)) + \frac{\hat{c}_{\sigma}^k}{2} (\hat{\bar{T}}_k(i,N) - \hat{\bar{T}}_e^k(i))^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \Pi_{t_2} [\overline{T}_0(M_0(j)) \quad T_0(0,j) , \eta_0(j)]$$

$$+ \sum_{k=1}^{Nat} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{e_1} [g_k(Q_k(j)) \quad \Delta p_k(j), \gamma_k(j)] + \Pi_{e_2} [f_k(W_k^d(j)) - \theta_k^N(j) , \mu_k(j)] \right\}$$

sur la branche
OA

$$+ \sum_{k=1}^{Nat} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{e_1} [g_k(\hat{Q}_k(j)) \quad \Delta \hat{p}_k(j), \gamma_k(j)] + \Pi_{e_2} [f_k(\hat{W}_k^d(j)) - \hat{\theta}_k^N(j) , \hat{\mu}_k(j)] \right\}$$

sur la branche
AC

$$+ \sum_{k=1}^{Nat} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{t_1} [g_k(\hat{Q}_k(j)) \quad \Delta \hat{p}_k(j), \gamma_k(j)] + \Pi_{t_2} [f_k(\hat{W}_k^d(j)) - \hat{\theta}_k^N(j) , \hat{\mu}_k(j)] \right\}$$

sur la branche
AD

IV.2. Ecriture du Lagrangien élargi L

$$L = L_a + L + \hat{L} + \tilde{L} + B$$

- L: Partie du lagrangien qui correspond aux relations d'état en chaque noeud (débits, températures, différences de pression) et aux relations d'état dans les canalisation (intégration des températures)
sur la branche OA.

$$\begin{aligned} \underset{\text{sur la branche OA}}{L} &= \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=i+1}^N p_0(i,j) \left[FA_0^i(w_0(j-1), T_0(i,j-1), T_0(i-1,j-1)) \quad T_0(i,j) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=M_0+1}^N \overline{p}_0(i,j) \left[FR_0^i(w_0(j-1), \overline{T}_0(i,j-1), \overline{T}_0(i-1,j-1)) \quad \overline{T}_0(i,j) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{Nat-1} \left\{ \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=M_0+1}^N p_k(i,j) \left[FA_k^i(w_k(j-1), T_k(i,j-1), T_k(i-1,j-1)) \quad T_k(i,j) \right] \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=M_0+1}^N \overline{p}_k(i,j) \left[FR_k^i(w_k(j-1), \overline{T}_k(i,j-1), \overline{T}_k(i-1,j-1)) \quad \overline{T}_k(i,j) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{N_0} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N p_k(i,j) \left[T_{k-1}(M_{k-1},j) \quad T_k(0,j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \bar{p}_k(i,j) \left[\frac{Q_{k+1}(j) \theta'_{k+1}(j) + S_{k+1}(j) \bar{T}_{k+1}(M_{k+1},j)}{S_k(j)} \quad \bar{T}_k(i,j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{N_0} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \eta_k(j) \left[\phi_k(\theta_k^2(j) = T_k(0,j), W_k^d(j)) \quad Q_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{N_0} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \xi_k(j) \left[\Phi_k(\theta_k^2(j) = T_k(0,j), W_k^d(j)) \quad \theta'_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_k(j) \left[S_{k+1}(j) + Q_{k+1}(j) \quad S_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{N_0} \left\{ \sum_{j=1}^N \delta_k(j) \left[\Delta p_{k-1}(j) \quad \psi_{k-1} \left[S_{k-1}(j), T_{k-1}(M_{k-1},j), T_{k-1}(0,j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1},j), \bar{T}_{k-1}(0,j) \right] \quad \Delta p_k(j) \right]^* \right\}
\end{aligned}$$

* Cette formulation correspond au cas où on envisage une variation des résistances hydrauliques linéiques avec le niveau des températures dans les canalisations.

$$\text{on a alors } \Delta p_k(j) = \Delta p_{k-1}(j) \quad \psi_{k-1} \left[S_{k-1}(j), T_{k-1}(M_{k-1},j), T_{k-1}(0,j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1},j), \bar{T}_{k-1}(0,j) \right]$$

$$= \Delta p_{k-1}(j) \quad (r_k^A + r_k^T) S_{k-1}(j) \quad (\text{Relation III.19})$$

$$r_k^A = f(T_{k-1}(0,j), T_{k-1}(M_{k-1},j))$$

$$r_k^T = f(\bar{T}_{k-1}(0,j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1},j))$$

- \hat{L} : Partie du Lagrangien qui correspond aux relations d'état en chaque noeud (débits, températures, différences de pression), et aux relations d'état dans les canalisations (intégration des températures) **sur la branche AC.**
- $\hat{\bar{L}}$: est construit de la même manière que \hat{L} , **pour la branche AD.**

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{\text{sur la branche AC}} &= \sum_{k=0}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=1}^{M_k} \sum_{i=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[F A_k^1(\hat{w}_k(j-1), \hat{T}_k(i,j-1), \hat{T}_k(i-1,j-1)) \quad \hat{T}_k(i,j) \right] \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^{M_k} \sum_{i=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[F R_k^1(\hat{w}_k(j-1), \hat{T}_k(i,j-1), \hat{T}_k(i-1,j-1)) \quad \hat{T}_k(i,j) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[\hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1},j) - \hat{T}_k(0,j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(0,j) \left[\frac{\hat{Q}_{k+1}(j) \hat{\theta}'_{k+1}(j) + \hat{S}_{k+1}(j) \hat{T}_{k+1}(\hat{M}_{k+1},j)}{\hat{S}_k(j)} - \hat{T}_k(0,j) \right] \right\} \\
& + \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_{N_{\text{et}}-1}(0,j) \left[\hat{\theta}'_{N_{\text{et}}}(j) - \hat{T}_{N_{\text{et}}-1}(0,j) \right] \\
& + \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{q}_k(j) \left[\phi_k(\hat{\theta}_k^*(j) - \hat{T}_k(0,j), W_k^q(j)) - \hat{Q}_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{\xi}_k(j) \left[\Phi_k(\hat{\theta}_k^*(j) - \hat{T}_k(0,j), W_k^q(j)), -\hat{\theta}'_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_k(j) \left[\hat{S}_{k+1}(j) + \hat{Q}_{k+1}(j) - \hat{S}_k(j) \right] \right\} \\
& + \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_{N_{\text{et}}-1}(j) \left[\hat{Q}_{N_{\text{et}}}(j) - \hat{S}_{N_{\text{et}}-1}(j) \right] \\
& + \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=1}^N \hat{\delta}_k(j) \left[\Delta P_{k-1}(j) - \psi_{k-1}(\hat{S}_{k-1}(j), \hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1},j), \hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1},j), \hat{T}_{k-1}(0,j), \hat{T}_{k-1}(0,j)) - \Delta P_k(j) \right] \right\}
\end{aligned}$$

• B: Partie du Lagrangien qui correspond aux relations d'état **au noeud d'embranchement A**.

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \hat{p}_0(0,j) \left[T_{N_{\text{et}}}(0,j) - (\hat{\theta}_0^*(j) - \hat{T}_0(0,j)) \right] \right. \\
& + \hat{p}_0^*(0,j) \left[T_{N_{\text{et}}}(0,j) - (\hat{\theta}_0^*(j) - \hat{T}_0(0,j)) \right] \\
& + \gamma_{N_{\text{et}}}(j) \left[\hat{S}_0(j) + \hat{\xi}_0(j) - S_{N_{\text{et}}}(j) \right] \\
& \left. + \bar{p}_{N_{\text{et}}}(0,j) \left[\frac{\hat{S}_0(j) \hat{T}_0(\hat{M}_0,j) + \hat{\xi}_0(j) \hat{T}_0^*(\hat{M}_0,j)}{S_{N_{\text{et}}}(j)} - \bar{T}_{N_{\text{et}}}(0,j) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left\{ \hat{\delta}_g(j) \begin{bmatrix} \Delta p_{\text{Nat}}(j) & \hat{\Delta} p_g(j) \end{bmatrix} + \hat{\delta}_g(j) \begin{bmatrix} \Delta p_{\text{Nat}}(j) & \hat{\Delta} p_g(j) \end{bmatrix} \right\}$$

IV.3. Calculs des équations d'optimalité du problème

- On calcule tout d'abord les relations vérifiées par les variables adjointes en faisant $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$.
- On calcule ensuite les gradients du lagrangien augmenté par rapport aux commandes en faisant $\frac{\partial L}{\partial U} = 0$
- Ces calculs sont reportés en Annexe I.



CHAPITRE VII

RESULTATS DE SIMULATION ET D'OPTIMISATION

Dans ce chapitre, nous rapportons quelques exemples de simulation et d'optimisation du comportement dynamique du réseau, que nous avons choisis délibérément très simples, afin de pouvoir faire facilement quelques analyses et remarques mais les algorithmes de simulation et d'optimisation peuvent être utilisés pour des réseaux arborescents quelconques à une chaufferie.)

Nous cherchons à mettre en évidence les particularités de chacun des trois schémas numériques.

Nous donnons les coûts de fonctionnement obtenus pour les trois schémas, les variations de ces coûts en fonction des discrétisations choisies.

I. Simulation

Nous avons effectué des **simulations du comportement dynamique de deux réseaux simples**, pour mieux analyser les résultats obtenus, bien que les programmes de simulation soient utilisables pour des réseaux arborescents de taille quelconque.

Nous avons simulé le comportement dynamique des deux réseaux en utilisant les trois schémas numériques décrits au cours de l'étude.

Nous avons cherché à **mettre en évidence les particularités dues à chaque modélisation**.

I.1. Schématisation des réseaux étudiés

RESEAU 1: C'est un réseau linéaire à une chaufferie et deux sous-stations, placées aux noeuds 2 et 3.



Figure 29

RESEAU 2: C'est un réseau arborescent à une chaufferie et quatre sous-stations, placées aux noeuds 2, 3, 5 et 7. Les noeuds 4 et 6 sont des noeuds fictifs.



Figure 30

1.2. Présentation du type de simulations réalisées

Nous allons donner des résultats de simulation obtenus lors des essais suivants.

RESEAU 1

- Nous avons supposé que les demandes aux sous-stations 2 et 3 varient brutalement à la même date notée $t_{\text{chgt dem}}$ et qu'elles augmentent.
- Nous avons introduit une courbe de commande simple en forme d'échelon, la date de changement de commande est notée $t_{\text{chgt com}}$. Le premier niveau de commande est le niveau optimum statique correspondant au premier niveau de demande dans le réseau, le deuxième niveau de commande est le niveau optimum statique correspondant au deuxième niveau de demande dans le réseau. La date de changement de niveau de commande peut être variable afin de simuler une anticipation trop ou pas assez importante à la chaufferie sur la variation de demande dans le réseau.

Dans l'essai rapporté dans ce mémoire, nous avons choisi une date d'anticipation suffisamment importante pour que le front chaud partant de la chaufferie parvienne aux sous-stations avant la date de changement de demande.

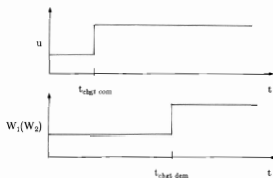


Figure 31

RESEAU 2

- Les demandes ne changent pas aux noeuds 2 et 5.
La demande change tout d'abord au noeud 3 et diminue, puis elle change au noeud 7 et augmente.
- Nous avons introduit une courbe de commande simple en forme d'échelons, la date du premier changement de commande est notée $t_{\text{chgt com}}^1$, la date du deuxième changement de commande est notée $t_{\text{chgt com}}^2$. Le premier niveau de commande est le niveau optimum statique correspondant au premier niveau de demande dans le réseau, le deuxième niveau de commande est le niveau optimum statique correspondant au deuxième niveau de demande dans le réseau, le troisième niveau de commande est le niveau optimum statique correspondant au troisième niveau de demande dans le réseau. Les dates des changements de niveau de commande correspondent aux dates de changement des demandes, c'est à dire qu'il n'y a pas d'anticipation à la chaufferie sur les dates de changement des demandes aux sous-stations.

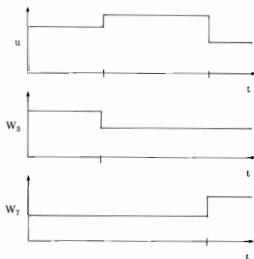


Figure 32

1.3. Caractéristiques des réseaux étudiés

Nous donnons en Annexe II les caractéristiques des deux réseaux étudiés (longueur et diamètre des canalisations, caractéristiques des échangeurs, demandes aux échangeurs, ...).

RESEAU 1: Pour ce réseau les caractéristiques des conduites et des échangeurs ont été relevées sur des portions du réseau de Lille, géré par la Compagnie Générale de Chauffage. Mais les canalisations correspondent à des tronçons proches du départ chaufferie et sont donc surdimensionnées par rapport à la taille de ce petit réseau et aux puissances appelées.

Les puissances requises correspondent à des fonctionnement au tiers ou au quart de la puissance maximum pouvant être demandée aux échangeurs.

Les vitesses résultantes dans le réseau sont très faibles et en dessous de la moyenne des vitesses circulant dans les réseaux classiques. Puis comme les pertes de charge le long du réseau (qui sont proportionnelles à $\frac{1}{D^5}$ ou $\frac{1}{D^4}$, D étant le diamètre des canalisations (cf. relations (II.11) et (II.12) au chapitre II) sont faibles, les optima calculés pour ce réseau sont situés à des niveaux de températures assez basses, car de forts débits ne sont pas très pénalisants pour le coût électrique.

Le coût électrique a une contribution très minoritaire par rapport au coût thermique dans le calcul du coût total.

La sous-station où la vanne de régulation est grande ouverte est la vanne de la sous-station 3 située en bout de réseau.

RESEAU 2: Pour ce réseau les caractéristiques des conduites et des échangeurs sont relevées aussi sur des portions du réseau de Lille. Mais elles correspondent à des tronçons proches des noeuds extrémaux. Les tailles des canalisations sont adaptées à la taille du réseau et des puissances requises.

Les vitesses résultantes dans le réseau sont beaucoup plus importantes que dans le cas du premier réseau étudié et correspondent à des vitesses classiques existant dans les réseaux (entre un et quatre mètres par seconde).

En conséquence les pertes de charge sont beaucoup plus importantes et les optima calculés pour ce réseau sont situés à des niveaux de température hauts associés à des débits faibles, afin de ne pas pénaliser le coût électrique.

La sous-station où la vanne de régulation est grande ouverte est la vanne de la sous-station (7) située en bout de réseau. On note que les pertes de charge sont plus importantes que dans le cas du premier réseau en observant l'écart entre la différence de pression au noeud (7) juste utile à satisfaire la contrainte à l'échangeur (7) et la différence de pression au noeud amont (6) (puis aux autres noeuds amont suivants). Il est important et est dû aux pertes de charge dans les canalisations entre le noeud (6) et (7). On ne voyait pas un tel écart dans le cas du premier réseau entre les noeuds (2) et (3).

1.4. Etude complète des deux simulations

Pour chacun des deux réseaux nous avons effectué une simulation du type décrit en 1.2. que nous détaillons.

Pour le premier réseau nous avons effectué une simulation avec chacun des trois schémas, pour le deuxième réseau seulement avec le premier et le troisième schéma.

Nous rapportons en Annexe II pour chacune des deux simulations:

- La description des discrétisations adoptées pour chacun des schémas.
- les coûts de fonctionnement intégrés sur $[0, T_f]$ obtenus pour les simulations avec chacun des schémas.
- Les courbes d'évolution des coûts de fonctionnement, des variables d'états associées aux différents noeuds du réseau pour chacun des schémas.

Nous rapportons aussi en Annexe II dans l'étude de la première simulation:

- Les mêmes types de courbes d'évolution pour une discrétisation cinq fois plus fine pour le premier schéma afin de voir l'effet de l'affinement de la discrétisation.
- Les coûts de fonctionnement intégrés sur $[0, T_f]$, obtenus pour des discrétisations différentes pour chacun des trois schémas.

SIMULATION 1 sur le RESEAU 1

Dates intervenant dans la simulation.

| | |
|---|----------|
| - date de début de simulation ($= t_0$) | 0 s. |
| - date de fin de simulation ($= T_f$) | 30000 s. |
| - date de changement de commande | 5000 s. |
| date de changement des demandes aux noeuds 2 et 3 | 20000 s. |

Dans cette simulation, le front chaud en chaufferie arrive au noeud feuille 3 avant la date de changement de demande.

SIMULATION 2 sur le RESEAU 2

Dates intervenant dans la simulation.

| | |
|---|-------------------|
| - date de début de simulation ($= t_0$) | 0 s. |
| - date de fin de simulation ($= T_f$) | 6000 s. |
| - date de changement de commande | 500 s. et 3000 s. |
| - date de changement de la demande en 3 | 500 s. |
| - date de changement de la demande en 7 | 3000 s. |

I.4.1. Remarques qualitatives à partir des courbes de température, débit, différence de pression pour les trois schémas

- **Allure générale des réponses obtenues à travers les trois schémas**

Les réponses en température obtenues à travers le premier schéma ne sont pas raides contrairement à celles obtenues à travers le deuxième schéma ou le troisième schéma qui respectent les discontinuités. Mais les réponses ont la même allure générale.

- **Détails différents dans les réponses, dus aux particularités des schémas**

Pour le premier schéma la diffusion numérique incline le front raide que nous avons introduit en commande pour la température en départ chaufferie: le front chaud semble arriver aux feuilles plus tard que dans le cas du deuxième ou du troisième schéma. Ceci se voit très bien dans les courbes associées à la **première simulation sur le réseau 1**. Avec le premier schéma, à cause de l'inclinaison du front de température à la feuille 3, le niveau de température n'est pas suffisant à la date de changement de demande, on voit apparaître une pointe sur le débit. On peut voir que cette pointe sur le débit n'existe pas avec les deux autres schémas, le front chaud étant parvenu à la feuille avant la date de changement de demande. Le phénomène de diffusion, qui explique l'inclinaison des fronts, diminue avec une discrétisation plus fine du schéma et diminue quand on estime à des valeurs moins importantes les débits maximums dans les canalisations, pour rendre la condition de stabilité du schéma moins sévère. D'ailleurs sur les courbes obtenues la même simulation avec le premier schéma et avec une discrétisation en espace cinq fois plus fine, les effets de diffusion sont moins importants.

Pour le deuxième schéma, le débit dans la canalisation se construit à partir des débits aval avec un temps de retard. On peut voir l'illustration de ce phénomène sur les courbes de débits ou de coûts électriques instantanés pour la première simulation. Il semble que le coût électrique (ou le débit) ne varie pas avec un saut comme dans le cas du premier schéma mais avec un front légèrement incliné. Lors d'essais en simulation avec différentes discrétisations, nous avons observé que cette inclinaison diminuait effectivement avec des discrétisations plus fines donc des

pas de temps plus petits.

Pour le troisième schéma, les discontinuités sont parfaitement respectées, les températures et les débits varient sans amortissement, sans diffusion au cours des intégrations.

- **Différences sur les différences de pression entre les deux simulations**

La vanne de régulation est grande ouverte aux échangeurs (3) pour le RESEAU 1 et (7) pour le RESEAU 2.

On voit, comme on l'a déjà dit, que dans la première simulation pour le RESEAU 1 les pertes de charges en ligne sont très faibles et que les différences de pression entre les noeuds (2) et (3) sont peu importantes, contrairement à ce qui se passe dans la deuxième simulation pour le RESEAU 2 où les pertes de charge entre le noeud (7) et (3) sont importantes.

II. Optimisation

En optimisation, actuellement on utilise une modélisation basée sur le premier schéma numérique.

Nous avons effectué l'optimisation du comportement dynamique d'un réseau très simple à une chaufferie et une sous-station.

Nous avons ensuite étendu l'étude à un réseau linéaire à une chaufferie et deux sous-stations.

Le programme d'optimisation est utilisable pour n'importe quel réseau arborescent à une chaufferie.

II.1. Réseau à une chaufferie et une sous-station

Présentons le type d'optimisations réalisées.

Nous avons étudié les transitoires existant entre deux régimes stationnaires se succédant et correspondant à deux fonctionnements du réseau pour deux demandes à l'échangeur différentes ou pour deux tarifs électriques différents.

Nous initialisons l'état thermique des canalisations par un niveau correspondant au premier régime stationnaire optimal calculé pour la première demande ou le premier tarif électrique.

Nous imposons comme contrainte finale sur l'état thermique des canalisations de rejoindre le niveau correspondant au deuxième régime stationnaire optimal calculé pour la deuxième demande ou le deuxième tarif électrique.

Nous avons auparavant fait quelques essais d'optimisation pour retrouver différents optima statiques et vérifier que nous trouvons les mêmes résultats que ceux obtenus avec les calculs effectués par un programme de modélisation du régime statique.

II.1.1. Caractéristiques du réseau

Nous donnons les caractéristiques du réseau en Annexe III.

II.1.2. Variation de demande à l'échangeur

| | | |
|---------------------------|---------------------|--------------------------|
| • Discrétisation: | 20 points en espace | $\Delta x = 52,6$ m. |
| | | $\Delta t = 25,7$ s. |
| • Demandes à l'échangeur: | 600 points en temps | $T_f = 15420$ s. |
| | W_1 | 1500 000 W |
| | W_2 | 2000 000 W |
| | date de variation | 3215 s. = 125 Δt |
| • Tarifs énergétiques: | électrique | 5 |
| | thermique | 1 |

On rapporte en Annexe II la courbe des températures aller départ chaufferie et aller à l'arrivée à l'échangeur sur la première courbe, et la courbe du débit associé. L'optimisation a été faite par un algorithme basé sur la méthode d'Arrow-Hurwicz, et le résultat est visualisé au 300^{ème} pas d'algorithme; dès le 200^{ème} pas la convergence est satisfaisante. Nous avons fait la même optimisation à l'aide d'un algorithme basé sur la méthode d'Uzawa et la convergence est atteinte après 20 pas d'algorithme environ (chaque itération étant bien sûr plus pénalisante en temps calcul que celle d'Arrow-Hurwicz puisqu'il s'agit d'une minimisation primale complète).

II.1.2.1. Aspect qualitatif

On voit que la température décroît avant de monter pour atteindre le deuxième niveau statique, afin d'augmenter le débit associé pour que le front de chaleur envoyé à la chaufferie circule rapidement vers l'échangeur et qu'il y ait moins de pertes thermiques dans la canalisation durant ce transport.

Le temps d'anticipation à la chaufferie par rapport à la date de changement de demande correspond aux temps de parcours de la canalisation aller par le fluide.

On remarque à la fin de ce domaine d'étude des oscillations qui sont dues à la difficulté pour le système de satisfaire la contrainte finale. Nous avons réalisé la même optimisation sur un horizon $[0, T_f]$ plus large, les oscillations restent localisées en fin de courbe et s'étendent toujours sur la même largeur temporelle qui correspond au temps nécessaire au fluide pour partir de la chaufferie et atteindre le retour chaufferie, c'est à dire pour que les canalisations aller et retour se remplissent.

Nous remarquons aussi l'effet de diffusion introduit par le schéma, le "front" envoyé à la chaufferie s'incline et provoque à la date de changement de demande un pic sur le débit, puisque le

niveau thermique élevé n'arrive pas exactement à cette date mais avec un petit retard.

II.1.2.2. Aspect quantitatif

Comme nous l'avons fait remarquer pour la simulation 1, nous avons choisi un exemple de réseau où les canalisations sont très surdimensionnées et nous estompons alors l'effet des pertes de charge devant l'effet des pertes thermiques.

II.1.3. Variation de tarif électrique

| | | |
|-------------------------|----------------------|----------------------|
| • Discrétisation: | 20 points en espace | $\Delta x = 52,6$ m. |
| | | $\Delta t = 45,5$ s. |
| | 350 points en espace | $T_f = 15925$ s. |
| • Demande à l'échangeur | 1500 000 W | |
| • Tarifs énergétiques: | électrique | 3 puis 5 |
| | thermique | 1 puis 1 |

On rapporte en Annexe III la courbe des températures aller départ chaufferie et aller à l'arrivée à l'échangeur, puis la courbe du débit associé.

II.2. Réseau à une chaufferie et deux sous-stations

Nous reprenons l'étude du réseau 1, vu en simulation sur le même type d'essai, c'est-à-dire un changement des demandes aux échangeurs à la même date:

Dates intervenant dans l'optimisation

| | |
|---|----------|
| date de début de l'optimisation ($=t_0$) | 0 s. |
| date de fin de l'optimisation ($=T_f$) | 78776 s. |
| date de changement des demandes aux noeuds 2 et 3 | 36414 s. |

Les pas en espace et temps pour le schéma sont les suivants:

| | |
|---|---------|
| nombre de points de discrétisation pour la canalisation 1 | 20 |
| - pas en espace correspondant | 52.6 m. |
| nombre de points de discrétisation pour la canalisation 2 | 40 |
| pas en espace correspondant | 26.3 m. |
| - pas en temps | 120 s. |

On rapporte en Annexe III les courbes d'évolution des coûts de fonctionnement, des variables d'états du réseau.

II.2.1. Aspect qualitatif: étude des courbes optimales

Dans cet exemple qui est simple (réseau petit et linéaire, changement de demande à la même date pour les deux noeuds), il semble intuitivement que la commande optimale pourrait ressembler à un échelon qui anticipe sur la date de changement de demande dont les deux niveaux seraient les niveaux optima statiques, ou à une succession de deux échelons, un premier pour anticiper sur la variation de demande au noeud le plus éloigné, puis un deuxième pour anticiper sur la variation de demande au premier noeud. Il y a déjà une certaine difficulté pour évaluer les dates d'anticipation, (plus que dans le cas précédent à une seule sous-station) et cette intuition ne nous donne qu'une allure possible de la commande.

Les résultats nous donne une courbe de commande optimale qui semble anticiper à partir d'une certaine date avec une forme dans le détail bien différente d'un ou deux échelons, mais qui peut en moyenne ressembler à un échelon. On retrouve comme dans le cas à une sous-station une anticipation sur la variation de la demande aux sous-stations au niveau de la chaufferie, avec une diminution du niveau thermique avant une remontée, afin d'accélérer les vitesses et diminuer les pertes thermiques. L'augmentation se fait en deux étapes, une première tout d'abord pour que le premier front atteigne la sous-station la plus éloignée et une deuxième pour que le deuxième front atteigne la sous-station la moins éloignée.

Dans le cas de réseaux plus complexes, plus longs, avec embranchements, avec une variation de demande à des dates différentes selon les noeuds, on ne peut plus envisager une suite de commandes statiques.

Il est peut-être possible par contre, quand on a calculé la courbe de commande optimale, d'en déduire une courbe de commande, plus simple (dans notre exemple un échelon placé à une date calculée par l'optimiseur), d'utiliser les simulateurs à notre disposition pour évaluer les augmentations des coûts dues à cette simplification, et valider ou non l'utilisation de l'optimiseur.

Nous avons fait quelques comparaisons de ce genre sur le cas de ce réseau simple.

II.2.2. Aspect quantitatif: étude des coûts de fonctionnement

Nous avons comparé les coûts correspondants:

- à la courbe de commande sortie de l'optimiseur avec toutes les oscillations de la fin de courbe dues à la recherche de la satisfaction de la contrainte finale.
- à la courbe de commande sortie de l'optimiseur à laquelle on a retiré les oscillations de la fin de courbe et qu'on a remplacées par le deuxième niveau optimum statique.

- à des courbes de commande en forme d'échelons pour lesquelles la première partie de l'échelon est le premier niveau optimum statique et la deuxième partie est le deuxième niveau optimum statique. Nous avons placé l'échelon qui doit permettre d'anticiper sur la variation des demandes à des dates variables.

Les coûts intégraux dans notre exemple sont les plus faibles pour la commande optimale, ne sont pas différents pour la courbe optimale avec et sans oscillations. Les coûts intégraux pour des courbes de commande en forme d'échelon" sont plus importants mais dans une proportion faible sur tout le domaine d'intégration correspondant aux figures ($< 1\%$); bien sûr la différence serait plus importante si on ne se rapportait qu' à la zone où la commande calculée par l'optimiseur est vraiment différente de la courbe "échelon" C'est pourquoi nous ne donnons pas de valeurs chiffrées, elles correspondraient à des domaines d'intégration arbitraires qui n'ont pas de sens particulier.

Nous avons remarqué qu'une anticipation trop faible sur la date de changement de demande induit des débits dans le réseau beaucoup plus importants (multipliés par 10 ou plus) que dans le cas de la commande optimale.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

A la suite de ce cette étude nous avons acquis plusieurs outils logiciels d'aide à la gestion des réseaux de chauffage urbain.

trois simulateurs du comportement dynamique du réseau.

un optimiseur du comportement dynamique du réseau.

Les **simulateurs** nous permettent de tester le comportement du réseau face à certaines situations qu'on impose (variation de demandes aux sous-stations à des dates arbitraires, variation de la commande) et dans certaines conditions de fonctionnement du réseau qu'on choisit arbitrairement (demandes plus ou moins fortes, échangeurs sous ou surdimensionnés, canalisations plus ou moins grosses). On peut étudier les temps de transit des fronts de chaleur à travers le réseau; malgré les particularités de chacun des schémas on obtient de bonnes informations sur l'allure des transitoires. On peut obtenir des évaluations de coût de fonctionnement pour diverses stratégies de pilotage heuristiques.

L'optimiseur nous fait découvrir des lois de commande non intuitives, ce qui laisse à penser que les optima de fonctionnement peuvent être variés et différents de ceux qui peuvent classiquement être imaginés. Ces tests en optimisation deviennent des aides à l'apprentissage de la conduite des réseaux, des aides à la compréhension des phénomènes se déroulant dans le réseau, des aides à la perception de l'importance que prennent le coût thermique ou le coût hydraulique dans le coût d'exploitation, en fonction du dimensionnement du réseau. Ceci bien sûr pouvait déjà être étudié avec un logiciel modélisant le comportement statique du réseau; mais les régimes transitoires qui dans certains cas de figures deviennent importants n'étaient pas modélisés. Ces logiciels sont aussi des outils pouvant justifier des innovations dans la conduite des réseaux. Nous avons vu que selon le choix des caractéristiques du réseau, nous pouvons obtenir des effets hydrauliques plus ou moins importants et nous placer dans des conditions plus intéressantes d'essais d'optimisation du réseau. De larges voies sont ouvertes dans le domaine du test des logiciels concernant le régime dynamique et ce sont de nombreux essais dans des cas judicieux qui sans doute sont capables de fournir de plus amples justifications de l'intérêt de ce genre de logiciels.

D'autre part actuellement les logiciels de simulation sont d'utilisation très aisée et les sorties visualisées graphiquement apportent une aide à l'interprétation simple et rapide. Le logiciel d'optimisation basé sur un algorithme d'Arrow-Hurwicz présente encore la difficulté d'adaptation des coefficients de pénalisation et du choix des pas sur les variables primales et duales. Par contre le logiciel d'optimisation basé sur un algorithme d'Uzawa devient d'utilisation beaucoup plus souple. Il reste encore un travail à fournir pour choisir les optimiseurs utilisés dans la partie minimisation primale qui soient les mieux adaptés (rapport entre la qualité de convergence et le temps de convergence), et pour obtenir une adaptation astucieuse en cours d'algorithme des pas sur les variables duales. Tout ceci qui est totalement

BIBLIOGRAPHIE

1. A. BAMBERGER. *Cours d'analyse numérique*.
Ecole des Mines de Paris (1983)
2. P. BERHNARD. *Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques*.
Dunod Automatique, Bordas, Paris (1976)
3. D. BERTSEKAS. *Constrained Optimization And Lagrange Multiplier Methods*.
Academic Press (1982)
4. I. BRATASANU. *Conduite optimale d'un réseau de chauffage urbain*.
Mémoire de D.E.A d'Analyse numérique Université Pierre et Marie Curie (C.A.I./E.N.S.M.P. 1984)
5. I. BRATASANU, G. COHEN, J.M. CORON, Y. LENOIR, R. LIDIN. *Conduite optimale des réseaux de chauffage urbain*.
Convention Anjou Recherche C.G.E./ARMINES (C.A.I./E.N.S.M.P. Rapport final 1984)
6. I. BRATASANU, G. COHEN, R. LIDIN. *Commande optimale des réseaux de chauffage urbain*.
Convention Anjou Recherche C.G.E./ARMINES (C.A.I./E.N.S.M.P. Rapport final 1985)
7. H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*.
Masson (1983)
8. E. BRUNIER. *Analyse et optimisation de l'exploitation d'un système de chauffage urbain*.
Thèse Docteur de 3ème cycle - Université de Technologie de Compiègne (1978)
9. G. COHEN. *Décomposition et coordination en optimisation déterministe différentiable et non différentiable*.
Thèse de Doctorat Es Sciences - Université de Paris Dauphine, U.E.R. Mathématiques de la décision. (1984)
10. G. COHEN, A. JARRIGE. *Optimisation de la conduite de réseaux de chauffage urbain et de géothermie*.
Convention AFME / ARMINES (C.A.I./E.N.S.M.P. Rapport final 1986)
11. B. DURAND. *Optimisation de la gestion de l'énergie sur un site pétrochimique complexe*.
Thèse de Docteur-Ingénieur - Ecole des Mines de Paris (1980)
12. R. GLOWINSKI. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*.
Springer-Verlag (1982)

13. C. LEMARECHAL. *Méthodes numériques d'optimisation*
Notes sur le cours du D.E.A. d'Automatique Université de Paris Dauphine, U.E.R.
Mathématiques de la décision. (1983)
14. D.G. LUENBERGER. *Linear and Nonlinear Programming*.
Addison-Wesley Publishing company (1984)
15. U. MARCOWITZ, T. MEIS. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*.
Springer-Verlag (--)
16. J.M. MINOUX. *Programmation mathématiques Théorie et algorithmes*.
Dunod, Bordas et C.N.E.T.-E.N.S.T., Paris (1983)
17. P.A. RAVIART. *An analysis of particle methods*.
C.I.M.E. Course - Numerical Methods in fluid dynamics, Como(Italy) (1983)
18. P.A. RAVIART, J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées
partielles*.
Masson (1983)
19. R.D. RICHTMEYER and K.W. MORTON. *Difference Methodes for Initial-Value Problems*.
Interscience Publishers (1967)
20. R.T. ROCKAFELLAR. *Augmented Lagrange Multiplier Fonctions and Duality in Nonconvex Pro-
gramming*.
S.I.A.M. Journal Control.12,pp.268-285 (1974)
21. R. TEMAM. *Analyse numérique*.
P.U.F. (1970)

ANNEXE I

ECRITURE DES CONDITIONS D'OPTIMALITE DU PROBLEME

Utilisation du schéma décentré

Ecriture dans le cas d'un réseau arborescent à deux branches

1. Ecriture du Lagrangien augmenté L_A

$$\begin{aligned}
L_A = & \sum_{j=1}^{N-1} J_e(t_j, S_0(j), \Delta p_0(j)) \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ J_e(t_0, S_0(0), \Delta p_0(0)) + J_e(t_N, S_0(N), \Delta p_0(N)) \right\} \Delta t \\
& + \sum_{j=2}^{N-1} J_{ib}(t_j, S_0(j), \theta_0^k(j)), \theta_0^k(j) \Delta t + \frac{1}{2} \left\{ J_{ib}(t_0, S_0(0), \theta_0^k(0), \theta_0^k(0)) + J_{ib}(t_N, S_0(N), \theta_0^k(N), \theta_0^k(N)) \right\} \Delta t \\
& + \sum_{k=0}^{N_{st}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[p_{ia}^k(i) (T_k(i, N) - T_c^k(i)) + \frac{c a^k}{2} (T_k(i, N) - T_c^k(i))^2 \right] \right. \\
\text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[p_{et}^k(i) (\bar{T}_k(i, N) - \bar{T}_c^k(i)) + \frac{c r^k}{2} (\bar{T}_k(i, N) - \bar{T}_c^k(i))^2 \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_{st}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{ia}^k(i) (\hat{T}_k(i, N) - \hat{T}_c^k(i)) + \frac{c \hat{a}^k}{2} (\hat{T}_k(i, N) - \hat{T}_c^k(i))^2 \right] \right. \\
\text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{p}_{et}^k(i) (\hat{\bar{T}}_k(i, N) - \hat{\bar{T}}_c^k(i)) + \frac{c \hat{r}^k}{2} (\hat{\bar{T}}_k(i, N) - \hat{\bar{T}}_c^k(i))^2 \right] \right\} \\
& + \sum_{k=0}^{N_{st}-1} \left\{ \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{\hat{p}}_{ia}^k(i) (\hat{\hat{T}}_k(i, N) - \hat{\hat{T}}_c^k(i)) + \frac{c \hat{\hat{a}}^k}{2} (\hat{\hat{T}}_k(i, N) - \hat{\hat{T}}_c^k(i))^2 \right] \right. \\
\text{sur la branche} & \quad \left. + \sum_{i=0}^{M_k} \left[\hat{\hat{p}}_{et}^k(i) (\hat{\hat{\bar{T}}}_k(i, N) - \hat{\hat{\bar{T}}}_c^k(i)) + \frac{c \hat{\hat{r}}^k}{2} (\hat{\hat{\bar{T}}}_k(i, N) - \hat{\hat{\bar{T}}}_c^k(i))^2 \right] \right\} \\
& + \sum_{j=1}^N \Pi_{e_0} [\bar{T}_0(M_0(j) - T_0(0, j)), \eta_0(j)]
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{e_1} [g_k(Q_k(j)) - \Delta p_k(j), \gamma_k(j)] + \Pi_{e_2} [f_k(W_k^d(j)) - \theta_k^d(j) , \mu_k(j)] \right\}$$

sur la branche
OA

$$+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{e_1} [g_k(\hat{Q}_k(j)) - \Delta \hat{p}_k(j), \gamma_k(j)] + \Pi_{e_2} [f_k(\hat{W}_k^d(j)) - \hat{\theta}_k^d(j) , \hat{\mu}_k(j)] \right\}$$

sur la branche
AC

$$+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \Pi_{e_1} [g_k(\check{Q}_k(j)) - \Delta \check{p}_k(j), \check{\gamma}_k(j)] + \Pi_{e_2} [f_k(\check{W}_k^d(j)) - \check{\theta}_k^d(j) , \check{\mu}_k(j)] \right\}$$

sur la branche
AD

2. Ecriture du Lagrangien élargi L

$$L = L_A + L + \hat{L} + \tilde{L} + B$$

- L: Partie du lagrangien qui correspond aux relations d'état en chaque noeud (débits, températures, différences de pression) et aux relations d'état dans les canalisations (intégration des températures) sur la branche OA.

$$\begin{aligned} L_{\text{sur la branche OA}} = & \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=i+1}^N p_0(i,j) \left[FA_0^j(w_0(j-1), T_0(i,j-1), T_0(i-1,j-1)) \quad T_0(i,j) \right] \\ & + \sum_{i=1}^{M_0} \sum_{j=M_0+1}^N \bar{p}_0(i,j) \left[FR_0^j(w_0(j-1), \bar{T}_0(i,j-1), \bar{T}_0(i-1,j-1)) \quad \bar{T}_0(i,j) \right] \\ & + \sum_{k=1}^{N_0-1} \left\{ \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=M_0+1}^N p_k(i,j) \left[FA_k^j(w_k(j-1), T_k(i,j-1), T_k(i-1,j-1)) \quad T_k(i,j) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{M_k} \sum_{j=M_0+1}^N \bar{p}_k(i,j) \left[FR_k^j(w_k(j-1), \bar{T}_k(i,j-1), \bar{T}_k(i-1,j-1)) \quad \bar{T}_k(i,j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N p_k(i,j) \left[T_{k-1}(M_{k-1}, j) \quad T_k(0, j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=0}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \bar{p}_k(i,j) \left[\frac{Q_{k+1}(j) \theta'_{k+1}(j) + S_{k+1}(j) \bar{T}_{k+1}(M_{k+1}, j)}{S_k(j)} - \bar{T}_k(i, j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \eta_k(j) \left[\phi_k(\theta_k^N(j) = T_k(0, j), W_k^d(j)) \quad Q_k(j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \xi_k(j) \left[\Phi_k(\theta_k^N(j) = T_k(0, j), W_k^d(j)) \quad \theta'_k(j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=0}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_k(j) \left[S_{k+1}(j) + Q_{k+1}(j) \quad S_k(j) \right] \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{N_0-1} \left\{ \sum_{j=1}^N \delta_k(j) \left[\Delta p_{k-1}(j) - \psi_{k-1} \left[S_{k-1}(j), T_{k-1}(M_{k-1}, j), T_{k-1}(0, j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1}, j), \bar{T}_{k-1}(0, j) \right] \quad \Delta p_k(j) \right]^* \right\} \end{aligned}$$

* Cette formulation correspond au cas où on envisage une variation des résistances hydrauliques linéiques avec le niveau des températures dans les canalisations.

$$\begin{aligned} \text{on a alors } \Delta p_k(j) &= \Delta p_{k-1}(j) \quad \psi_{k-1} \left[S_{k-1}(j), T_{k-1}(M_{k-1,j}), T_{k-1}(0,j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1,j}), \bar{T}_{k-1}(0,j) \right] \\ &= \Delta p_{k-1}(j) \quad (r_{k-1}^A + r_{k-1}^T) S_{k-1}(j) \quad (\text{Relation III.19}) \\ r_{k-1}^A &= f(T_{k-1}(0,j), T_{k-1}(M_{k-1,j})) \\ r_{k-1}^T &= f(\bar{T}_{k-1}(0,j), \bar{T}_{k-1}(M_{k-1,j})) \end{aligned}$$

- \hat{L} : Partie du Lagrangien qui correspond aux relations d'état en chaque noeud (débits, températures, différences de pression), et aux relations d'état dans les canalisations (intégration des températures) **sur la branche AC.**

- \hat{L} : est construit de la même manière que \hat{L} , **pour la branche AD.**

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\text{sur la branche AC}} &= \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{i=1}^{\hat{M}_k} \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[F A_k^1(w_k(j-1), \hat{T}_k(i,j-1), \hat{T}_k(i-1,j-1)) \quad \hat{T}_k(i,j) \right] \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{\hat{M}_k} \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[F R_k^1(w_k(j-1), \hat{T}_k(i,j-1), \hat{T}_k(i-1,j-1)) \quad \hat{T}_k(i,j) \right] \Big\} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(i,j) \left[\hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1,j}) \quad \hat{T}_k(0,j) \right] \right\} \\ &+ \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_k(0,j) \left[\frac{\hat{Q}_{k+1}(j) \hat{\theta}'_{k+1}(j) + \hat{S}_{k+1}(j) \hat{T}_{k+1}(\hat{M}_{k+1,j})}{\hat{S}_k(j)} \quad \hat{T}_k(0,j) \right] \right\} \\ &+ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{p}_{N_{\text{et}}-1}(0,j) \left[\hat{\theta}'_{N_{\text{et}}}(j) \quad \hat{T}_{N_{\text{et}}-1}(0,j) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{q}_k(j) \left[\phi_k(\hat{\theta}_k^A(j) = \hat{T}_k(0,j), w_k^d(j)) \quad \hat{Q}_k(j) \right] \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \hat{\xi}_k(j) \left[\Phi_k(\hat{\theta}_k^A(j) = \hat{T}_k(0,j), w_k^d(j)), \quad \hat{\theta}_k'(j) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{N_{\text{et}}-1} \left\{ \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_k(j) \begin{bmatrix} \hat{S}_{k+1}(j) + \hat{Q}_{k+1}(j) & \hat{S}_k(j) \end{bmatrix} \right\} \\
 & + \sum_{j=M_0+1}^N \gamma_{N_{\text{et}}-1}(j) \begin{bmatrix} \hat{Q}_{N_{\text{et}}}(j) & \hat{S}_{N_{\text{et}}-1}(j) \end{bmatrix} \\
 & + \sum_{k=i}^{N_{\text{et}}} \left\{ \sum_{j=1}^N \hat{\delta}_k(j) \begin{bmatrix} \Delta p_{k-1}(j) & \psi_{k-1}(\hat{S}_{k-1}(j), \hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1,j}), \hat{T}_{k-1}(\hat{M}_{k-1,j}), \hat{T}_{k-1}(0,j), \hat{T}_{k-1}(0,j)) & \hat{\Delta} p_k(j) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

- B: Partie du Lagrangien qui correspond aux relations d'état au **noeud d'embranchement A**.

$$\begin{aligned}
 B = & \sum_{j=M_0+1}^N \left\{ \hat{p}_\theta(0,j) \begin{bmatrix} T_{\text{Nat}}(0,j) - (\hat{\theta}_\theta^A(j) = \hat{T}_\theta(0,j)) \end{bmatrix} \right. \\
 & + \hat{p}_\theta^*(0,j) \begin{bmatrix} T_{\text{Nat}}(0,j) - (\hat{\theta}_\theta^B(j) = \hat{T}_\theta^*(0,j)) \end{bmatrix} \\
 & + \gamma_{\text{Nat}}(j) \begin{bmatrix} \hat{S}_\theta(j) + \hat{S}_\theta(j) - S_{\text{Nat}}(j) \end{bmatrix} \\
 & + \bar{p}_{\text{Nat}}(0,j) \left[\frac{\hat{S}_\theta(j) \hat{T}_\theta(\hat{M}_{0,j}) + \hat{S}_\theta(j) \hat{T}_\theta^*(\hat{M}_{0,j})}{S_{\text{Nat}}(j)} \bar{T}_{\text{Nat}}(0,j) \right] \Big\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \left\{ \hat{\delta}_i(j) \begin{bmatrix} \Delta p_{\text{Nat}}(j) & \hat{\Delta} p_\theta(j) \end{bmatrix} + \hat{\delta}_\theta(j) \begin{bmatrix} \Delta p_{\text{Nat}}(j) & \hat{\Delta} p_\theta(j) \end{bmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

3. Dérivation de L par rapport aux variables d'état du problème pour obtenir les équations adjointes

□ NOEUD RACINE $k = 0$: Dérivation par rapport aux variables d'état au noeud chaufferie

* Calcul du gradient de L par rapport à $\Delta p_0(j)$ $j = 1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta p_0(j)} = \frac{\partial J_e}{\partial \Delta p_0(j)} \Delta t + \delta_i(j)$$

* Calcul du gradient de L par rapport à $\Delta p_0(N)$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta p_0(N)} = \frac{1}{2} \frac{\partial J_e}{\partial \Delta p_0(N)} \Delta t + \delta_i(N)$$

* Calcul du gradient de L par rapport à $\theta_0^N(j) = T_0(0, j)$ $j = 2, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_0^N(j)} &= \frac{\partial J_{\text{th}}(S_0(j), \theta_0^N(j), \theta_0^N(j))}{\partial \theta_0^N(j)} \Delta t \\ &+ (1 - \alpha_0 \Delta t) \frac{w_0(j)}{\lambda_0} p_0(1, j+1) \\ &\frac{\partial \Pi_{s_3} [\bar{T}_0(M_0, j) - \theta_0^N(j), \eta_0(j)]}{\partial x_1} \delta_i(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \theta_0^N(j)} \end{aligned}$$

* Calcul du gradient de L par rapport à $\theta_0^N(N) = T_0(0, N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_0^N(N)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial J_{\text{th}}(S_0(N), \theta_0^N(N), \theta_0^N(N))}{\partial \theta_0^N(N)} \Delta t \\ &+ p_{\text{ca}}^0(0) + c \alpha^0 (\theta_0^N(N) - T_c^0(0)) \\ &\frac{\partial \Pi_{s_3} [\bar{T}_0(M_0, N) - \theta_0^N(N), \eta_0(N)]}{\partial x_1} \delta_i(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial T_0(0, N)} \end{aligned}$$

• Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_0(i, j)$ $i=1, M_0-1$ $j=i+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0(i, j)} = 0 \iff p_0(i, j) = (1 - \alpha_0 \Delta t) \left[\left(1 - \frac{w_0(j)}{\lambda_0}\right) p_0(i, j) + \frac{w_0(j)}{\lambda_0} p_0(i+1, j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_0(M_0, j)$ $j=M_0+1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0(M_0, j)} = 0 \Leftrightarrow p_0(M_0, j) = p_1(0, j) + (1-\alpha_0 \Delta t) \left(1 - \frac{w_0(j)}{\lambda_0}\right) p_0(M_0, j+1) - \varepsilon_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial T_0(M_0, j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_0(i, N)$ $i=1, M_0-1$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0(i, N)} = 0 \Leftrightarrow p_0(i, N) = p_{ca}^0(i) + ca^0(T_0(i, N) - T_r^0(i))$$

- Calcul de la dérivée par rapport à $T_0(M_0, N)$

$$\frac{\partial L}{\partial T_0(M_0, N)} = 0 \Leftrightarrow p_0(M_0, N) = p_{ca}^0(M_0) + ca^0(T_0(M_0, N) - T_r^0(M_0)) + p_1(1, N) \varepsilon_1(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial T_0(M_0, N)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(i, j)$ $i=1, M_0-1$ $j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(i, j)} = 0 \Leftrightarrow \bar{p}_0(i, j) = (1-\alpha_0 \Delta t) \left[\left(1 - \frac{w_0(j)}{\lambda_0}\right) \bar{p}_0(i, j+1) + \frac{w_0(j)}{\lambda_0} \bar{p}_0(i+1, j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(M_0, j)$ $j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(M_0, j)} = 0 \Leftrightarrow \bar{p}_0(\bar{M}_0, j) = & (1-\alpha_0 \Delta t) \left(1 - \frac{w_0(j)}{\lambda_0}\right) \bar{p}_0(\bar{M}_0, j+1) \\ & + \frac{\partial J_{12}(S_0(j), \theta_0^s(j), \theta_0^f(j))}{\partial y_s} \Delta t \\ & + \frac{\partial \Pi_s [\bar{T}_0(M_0, j) - T_0(0, j), \eta_0(j)]}{\partial \bar{T}_0(M_0, j)} \\ & \varepsilon_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \bar{T}_0(M_0, j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(0, j)$ $j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(0, j)} = 0 \Leftrightarrow \bar{p}_0(0, j) = (1-\alpha_0 \Delta t) \frac{w_0(j)}{\lambda_0} \bar{p}_0(1, j+1) - \varepsilon_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \bar{T}_0(0, j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(i, N)$ $i=1, M_0-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(i, N)} \equiv 0 \iff \bar{p}_0(i, N) = p_{cr}(i) + cr^0(\bar{T}_0(i, N) \quad \bar{T}_c^0(i))$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(M_0, N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(M_0, N)} \equiv 0 \iff \bar{p}_0(M_0, N) = & \frac{1}{2} \frac{\partial J_{1b}(S_0(N), \theta_0^*(N), \theta_0^*(N))}{\partial y_3} \Delta t \\ & + p_{cr}(M_0) + cr^0(\bar{T}_0(M_0, N) \quad \bar{T}_c^0(M_0)) \\ & + \frac{\partial \Pi_{e_3}[\bar{T}_0(M_0, N) \quad T_0(0, N), \mu_0(N)]}{\partial \bar{T}_0(M_0, N)} \\ & \delta_1(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \bar{T}_0(M_0, N)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_0(0, N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_0(0, N)} \equiv 0 \iff \bar{p}_0(0, N) = & p_{cr}(0) + cr^0(\bar{T}_0(0, N) \quad \bar{T}_c^0(0)) \\ & \delta_1(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \bar{T}_0(0, N)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $w_0(j)$ $j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_0(j)} \equiv 0 \iff \gamma_0(j) = & \beta_0 \left[\frac{\partial J_a(t_j, S_0(j), \Delta p_0(j))}{\partial w_0(j)} + \frac{\partial J_{1b}(t_j, S_0(j), \theta_0^*(j), \theta_0^*(j))}{\partial w_0(j)} \right] \Delta t \\ & + \beta_0 \left[\sum_{i=1}^{M_0} p_0(i, j+1) \frac{1}{\lambda_0} (1 - \alpha_0 \Delta t) (-T_0(i, j) + T_0(i-1, j)) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{M_0} \bar{p}_0(i, j+1) \frac{1}{\lambda_0} (1 - \alpha_0 \Delta t) (-\bar{T}_0(i, j) + \bar{T}_0(i-1, j)) \right] \\ & \bar{p}_0(0, j) \left[\frac{Q_1(j) \theta_1'(j) + S_1(j) \bar{T}_1(M_1, j)}{S_0^2(j)} \right] \delta_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial S_0(j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $w_0(N)$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0(N)} \equiv 0 \iff \gamma_0(N) = \frac{\beta_0}{2} \left[\frac{\partial J_a(t_N, S_0(N), \theta_0^*(N), \theta_0^*(N))}{\partial w_0(N)} + \frac{\partial J_{1b}(t_N, S_0(N), \theta_0^*(N), \theta_0^*(N))}{\partial w_0(N)} \right] \Delta t$$

$$\overline{p}_0(0,N)\left[\frac{Q_1(N)\,\theta_1'(N)+S_1(N)\,\overline{T}_1(M_1,N)}{S_0^2(N)}\right]\delta_1(N)\frac{\partial\psi_0(\ldots)}{\partial S_0(N)}$$

- $Q_o(j)$, $\theta_o'(j)$ n'existent pas

□ **NOEUD LINEAIRE** $1 \leq k \leq N_{st}-1$: Dérivation par rapport aux variables d'état à un noeud situé au milieu d'un tronçon linéaire Il existe quelques différences s'il y a une sous-station ou non au noeud k.

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\Delta p_k(j) \quad j=M_0+1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta p_k(j)} = 0 \Leftrightarrow \delta_k(j) = \delta_{k+1}(j) - \frac{\partial \Pi_{c_1} [g_k(Q_k(j)) - \Delta p_k(j), \nu_k(j)]}{\partial y_1}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(i, j) \quad i=1, M_k-1 \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial T_k(i, j)} = 0 \Leftrightarrow p_k(i, j) = (1 - \alpha_k \Delta t) \left[\left(1 - \frac{w_k(j)}{\lambda_k}\right) p_k(i, j+1) + \frac{w_k(j)}{\lambda_k} p_k(i+1, j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(M_k, j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_k(M_k, j)} = 0 \Leftrightarrow p_k(M_k, j) &= p_{k+1}(0, j) + (1 - \alpha_k \Delta t) \left(1 - \frac{w_k(j)}{\lambda_k}\right) p_k(M_k, j+1) \\ &\quad \delta_{k+1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(M_k, j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(0, j) \quad j=M_0-1, N-1$

1° cas: Il y a une sous-station en k.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_k(0, j)} = 0 \Leftrightarrow p_k(0, j) &= (1 - \alpha_k \Delta t) \frac{w_k(j)}{\lambda_k} p_k(1, j+1) - \frac{\partial \Pi_{c_2} [f_k(W_k(j)) - T_k(0, j), \mu_k(j)]}{\partial y_1} \\ &\quad + \eta_k(j) \frac{\partial \phi_k(T_k(0, j), W_k^d(j))}{\partial T_k(0, j)} + \xi_k(j) \frac{\partial \Phi_k(T_k(0, j), W_k^d(j))}{\partial T_k(0, j)} \\ &\quad \delta_{k+1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(0, j)} \end{aligned}$$

2° cas: Il n'y a pas de sous-station en k.

$$\frac{\partial L}{\partial T_k(0, j)} = 0 \Leftrightarrow p_k(0, j) = (1 - \alpha_k \Delta t) \frac{w_k(j)}{\lambda_k} p_k(1, j+1) - \delta_{k-1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(0, j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(i, N) \quad i=1, M_k-1$

$$\frac{\partial L}{\partial T_k(i, N)} = 0 \Leftrightarrow p_k(i, N) = p_{ca}^k(i) + ca^k(T_k(i, N) - T_c^k(i))$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(M_k, N)$

$$\frac{\partial L}{\partial T_k(M_k, N)} \equiv 0 \Leftrightarrow p_k(M_k, N) = p_{k+1}(0, N) + p_{ca}^k(M_k) + ca^k(T_k(M_k, N) - T_c^k(M_k))$$

$$\delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(M_k, N)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_k(0, N)$

1° cas: Il y a une sous-station en k.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_k(0, N)} \equiv 0 \Leftrightarrow p_k(0, N) = & p_{ca}^k(0) + ca^k(T_k(0, N) - T_c^k(0)) - \frac{\partial \Pi_{\varepsilon_0} [f_k(W_k^d(N)) - T_k(0, N), \mu_k(N)]}{\partial \gamma_1} \\ & + \eta_k(N) \frac{\partial \phi_k(T_k(0, N), W_k^d(N))}{\partial T_k(0, N)} + \xi_k(N) \frac{\partial \Phi_k(T_k(0, N), W_k^d(N))}{\partial T_k(0, N)} \\ & \delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(0, N)} \end{aligned}$$

2° cas: Il n'y a pas de sous-station en k.

$$\frac{\partial L}{\partial T_k(0, N)} \equiv 0 \Leftrightarrow p_k(0, N) = p_{ca}^k(0) + ca^k(T_k(0, N) - T_c^k(0)) \quad \delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial T_k(0, N)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(i, j) \quad i=1, M_k-1 \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(i, j)} \equiv 0 \Leftrightarrow \bar{p}_k(i, j) = (1 - \alpha_k \Delta t) \left[\left(1 - \frac{w_k(j)}{\lambda_k}\right) \bar{p}_k(i, j+1) + \frac{w_k(j)}{\lambda_k} \bar{p}_k(i+1, j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(M_k, j) \quad j=M_0+1, N-1$

Les cas avec ou sans sous-station sont indentiques.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(M_k, j)} \equiv 0 \Leftrightarrow \bar{p}_k(M_k, j) = & (1 - \alpha_k \Delta t) \left(1 - \frac{w_k(j)}{\lambda_k}\right) \bar{p}_k(M_k, j+1) \\ & + \bar{p}_{k-1}(0, j) \frac{S_k(j)}{S_{k-1}(j)} \quad \delta_{k+1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial \bar{T}_k(M_k, j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(0, j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(0, j)} \equiv 0 \Leftrightarrow \bar{p}_k(0, j) = (1 - \alpha_k \Delta t) \left(1 - \frac{w_k(j)}{\lambda_k}\right) \bar{p}_k(1, j+1) \quad \delta_{k+1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial \bar{T}_k(0, j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(i,N)$ $i=1,M_k-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(i,N)} = 0 \iff \bar{p}_k(i,N) = p_{cr}^k(i) + cr^k(\bar{T}_k(i,N) - \bar{T}_c^k(i))$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(M_k,N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(M_k,N)} = 0 \iff \bar{p}_k(M_k,N) = & p_{cr}^k(M_k) + cr^k(\bar{T}_k(M_k,N) - \bar{T}_c^k(M_k)) \\ & + \bar{p}_{k-1}(0,N) \frac{S_k(N)}{S_{k-1}(N)} \delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial \bar{T}_k(M_k,N)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_k(0,N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{T}_k(0,N)} = 0 \iff \bar{p}_k(0,N) = & p_{cr}^k(0) + cr^k(\bar{T}_k(0,N) - \bar{T}_c^k(0)) \\ & \delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial \bar{T}_k(0,N)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\theta'_k(j)$ $j=M_0+1,N$

1° cas: Il y a une sous-station au noeud k.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'_k(j)} = 0 \iff \xi_k(j) = \bar{p}_{k-1}(0,j) \frac{Q_k(j)}{S_{k-1}(j)}$$

2° cas: Il n'y a pas de sous-station au noeud k.

Pas de calcul de $\xi_k(j)$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $Q_k(j)$ $j=M_0+1,N$

1° cas: Il y a une sous-station au noeud k.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_k(j)} = 0 \iff \eta_k(j) = & \gamma_{k-1}(j) + \bar{p}_{k-1}(0,j) \frac{\theta'_k(j)}{S_{k-1}(j)} \\ & + \frac{\partial \Pi_{c_1}[\xi_k(Q_k(j)) \quad \Delta p_k(j), \nu_k(j)]}{\partial y_1} \frac{\partial \xi_k(\theta_k(j))}{\partial Q_k(j)} \end{aligned}$$

2° cas: Il n'y a pas de sous-station au noeud k.

Pas de calcul de $\eta_k(j)$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $w_k(j)$ $j=M_0+1,N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial w_k(j)} = 0 \iff \gamma_k(j) = \gamma_{k-1}(j) + \bar{p}_{k-1}(0,j) \frac{\bar{T}_k(M_k,j)}{S_{k-1}(j)}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{p}_k(0,j) \left[\frac{Q_{k+1}(j) \theta'_{k+1}(j) + S_{k+1}(j) \bar{T}_{k+1}(M_{k+1},j)}{S_k^2(j)} \right] \\
 & + \beta_k \left[\sum_{i=1}^{M_k} p_k(i,j+1) (1-\alpha_k \Delta t) \frac{1}{\lambda_k} (-T_k(i,j) + T_k(i-1,j)) \right] \\
 & + \left[\sum_{i=1}^{M_k} \bar{p}_k(i,j+1) (1-\alpha_k \Delta t) \frac{1}{\lambda_k} (-\bar{T}_k(i,j) + \bar{T}_k(i-1,j)) \right] \\
 & \delta_{k+1}(j) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial S_k(j)}
 \end{aligned}$$

• Calcul de la dérivée de L par rapport à $w_k(N)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial w_k(N)} \equiv 0 \iff \gamma_k(N) &= \gamma_{k-1}(N) + \bar{p}_{k-1}(0,N) \frac{\bar{T}_k(M_k,N)}{S_{k-1}(N)} \\
 &- \bar{p}_k(0,N) \left[\frac{Q_{k+1}(N) \theta'_{k+1}(N) + S_{k+1}(N) \bar{T}_{k+1}(M_{k+1},N)}{S_k^2(N)} \right] \\
 &\delta_{k+1}(N) \frac{\partial \psi_k(\dots)}{\partial S_k(N)}
 \end{aligned}$$

□ **NOEUD AVANT EMBRANCHEMENT** $k = \text{Nst}$: Dérivation par rapport aux variables d'état à un noeud situé avant un embranchement

Rappelons qu'en ce noeud les canalisations aller et retour sont fictives donc:

$$\begin{cases} T_{\text{Nst}}(0,j) = T_{\text{Nst}}(M_{\text{Nst}},j) \\ \bar{T}_{\text{Nst}}(0,j) = \bar{T}_{\text{Nst}}(M_{\text{Nst}},j) \\ p_{\text{Nst}}(0,j) = p_{\text{Nst}}(M_{\text{Nst}},j) \\ \bar{p}_{\text{Nst}}(0,j) = \bar{p}_{\text{Nst}}(M_{\text{Nst}},j) \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\Delta p_{\text{Nst}}(j) \quad j=1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta p_{\text{Nst}}(j)} = 0 \iff \delta_{\text{Nst}}(j) = - \frac{\partial \Pi_{c_1} [g_{\text{Nst}}(Q_{\text{Nst}}(j)) \quad \Delta p_{\text{Nst}}(j), \mu_{\text{Nst}}(j)]}{\partial y_1} + \delta_g(j) + \delta_g(j)$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $T_{\text{Nst}}(0,j) \quad j=M_0+1, N$

1° cas: Il y a une sous-station au noeud Nst.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial T_{\text{Nst}}(0,j)} = 0 \iff p_{\text{Nst}}(0,j) = \hat{p}_g(0,j) + \hat{p}_g(0,j) - \frac{\partial \Pi_{c_2} [f_{\text{Nst}}(W_{\text{Nst}}^d(j) - T_{\text{Nst}}(0,j)), \mu_{\text{Nst}}(j)]}{\partial y_1} \\ + \eta_{\text{Nst}}(j) \frac{\partial \phi_{\text{Nst}}(T_{\text{Nst}}(0,j), W_{\text{Nst}}^d(j))}{\partial T_{\text{Nst}}(0,j)} \\ + \xi_{\text{Nst}}(j) \frac{\partial \Phi_{\text{Nst}}(T_{\text{Nst}}(0,N), W_{\text{Nst}}^d(N))}{\partial T_{\text{Nst}}(0,N)} \end{aligned}$$

2° cas: Il n'y a pas de sous-station au noeud Nst.

$$\frac{\partial L}{\partial T_{\text{Nst}}(0,j)} = 0 \iff p_{\text{Nst}}(0,j) = \hat{p}_g(0,j) + \hat{p}_g(0,j)$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\bar{T}_{\text{Nst}}(0,j) \quad j=M_0+1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{T}_{\text{Nst}}(0,j)} = 0 \iff \bar{p}_{\text{Nst}}(0,j) = \hat{p}_{\text{Nst}-1}(0,j) \frac{S_{\text{Nst}}(j)}{S_{\text{Nst}-1}(j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\theta'_{\text{Nst}}(j) \quad j=M_0+1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'_{\text{Nst}}(j)} = 0 \iff \xi_{\text{Nst}}(j) = \bar{p}_{\text{Nst}-1}(0,j) \frac{Q_{\text{Nst}}(j)}{S_{\text{Nst}-1}(j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $Q_{Nst}(j)$ $j=M_0+1,N$

1 ° cas: Il y a une sous-station au noeud Nst.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{Nst}(j)} \equiv 0 \iff \eta_{Nst}(j) = \gamma_{Nst-1}(j) + \bar{p}_{Nst-1}(0,j) \frac{\theta'_{Nst}(j)}{S_{Nst-1}(j)} + \frac{\partial \Pi_{c_i} [g_{Nst}(Q_{Nst}(j)) - \Delta p_{Nst}(j), \nu_{Nst}(j)]}{\partial y_1} \frac{\partial g_{Nst}(Q_{Nst}(j))}{\partial Q_{Nst}(j)}$$

2 ° cas: Il n'y a pas de sous-station au noeud Nst.

Pas de calcul de $\eta_{Nst}(j)$.

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $w(j)$ $j=M_0+1,N$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{Nst}(j)} \equiv 0 \iff \gamma_{Nst}(j) = \gamma_{Nst-1}(j) + \bar{p}_{Nst-1}(0,j) \frac{\bar{T}_{Nst}(0,j)}{S_{Nst-1}(j)} + \bar{p}_{Nst}(0,j) \frac{\left[\hat{S}_\theta(j) \hat{T}_\theta(M_{\theta,j}) + \hat{S}_\theta(j) \hat{T}_\theta^*(M_{\theta,j}) \right]}{S_{Nst}^2(j)}$$

□ NOEUD APRES EMBRANCHEMENT $k = \hat{0}$ ou $\hat{0}$: : Dérivation par rapport aux variables d'état à un noeud après embranchement

Par convention, en ce noeud il n'y a jamais de sous-station.

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\Delta \hat{p}_g(j) \quad j=M_0+1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta \hat{p}_g(j)} = 0 \iff \hat{\delta}_g(j) = \hat{\delta}_i(j)$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(i, j) \quad i=1, \hat{M}_0-1 \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(i, j)} = 0 \iff \hat{p}_g(i, j) = (1 - \hat{\alpha}_0 \Delta t) \left[\left(1 - \frac{\hat{w}_g(j)}{\hat{\lambda}_0}\right) \hat{p}_g(i, j+1) + \frac{\hat{w}_g(j)}{\hat{\lambda}_0} \hat{p}_g(i+1, j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(\hat{M}_0, j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(\hat{M}_0, j)} = 0 \iff \hat{p}_g(\hat{M}_0, j) = & \hat{p}_i(0, j) + (1 - \hat{\alpha}_0 \Delta t) \left(1 - \frac{\hat{w}_g(j)}{\hat{\lambda}_0}\right) \hat{p}_g(\hat{M}_0, j+1) \\ & - \hat{\delta}_i(j) \frac{\partial \psi_g(\dots)}{\partial \hat{T}_g(\hat{M}_0, j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(0, j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(0, j)} = 0 \iff \hat{p}_g(0, j) = (1 - \hat{\alpha}_0 \Delta t) \frac{\hat{w}_g(j)}{\hat{\lambda}_0} \hat{p}_g(0, j+1) + \hat{\delta}_i(j) \frac{\partial \psi_g(\dots)}{\partial \hat{T}_g(0, j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(i, N) \quad i=1, \hat{M}_0-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(i, N)} = 0 \iff \hat{p}_g(i, N) = \hat{p}_{ca}^{\hat{0}}(i) + c_a^{\hat{0}} (\hat{T}_g(i, N) - \hat{T}_c^{\hat{0}}(i))$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(\hat{M}_0, N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(\hat{M}_0, N)} = 0 \iff \hat{p}_g(\hat{M}_0, N) = & \hat{p}_i(0, N) + \hat{p}_{ca}^{\hat{0}}(\hat{M}_0) + c_a^{\hat{0}} (\hat{T}_g(\hat{M}_0, N) - \hat{T}_c^{\hat{0}}(\hat{M}_0)) \\ & - \hat{\delta}_i(N) \frac{\partial \psi_g(\dots)}{\partial \hat{T}_g(\hat{M}_0, N)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_g(0, N)$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_g(0, N)} = 0 \iff \hat{p}_g(0, N) = \hat{p}_{ca}^{\hat{0}}(0) + c_a^{\hat{0}} (\hat{T}_g(0, N) - \hat{T}_c^{\hat{0}}(0)) - \hat{\delta}_i(N) \frac{\partial \psi_g(\dots)}{\partial \hat{T}_g(0, N)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(i,j) \quad i=1, \hat{M}_0-1 \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(i,j)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(i,j) = (1-\hat{\alpha}_0 \Delta t) \left[\left(1 - \frac{\hat{w}_0(j)}{\hat{\lambda}_0}\right) \hat{T}_0(i,j+1) + \frac{\hat{w}_0(j)}{\hat{\lambda}_0} \hat{T}_0(i+1,j+1) \right]$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(\hat{M}_0,j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,j)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(\hat{M}_0,j) = & (1-\hat{\alpha}_0 \Delta t) \left(1 - \frac{\hat{w}_0(j)}{\hat{\lambda}_0}\right) \hat{p}_0(\hat{M}_0,j+1) \\ & + \bar{p}_{Nat}(0,j) \frac{\hat{S}_0(j)}{S_{Nat}(j)} - \hat{\delta}_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(0,j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(0,j)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(0,j) = (1-\hat{\alpha}_0 \Delta t) \left(1 - \frac{\hat{w}_0(j)}{\hat{\lambda}_0}\right) \hat{p}_0(1,j+1) - \hat{\delta}_1(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(i,N) \quad i=1, \hat{M}_0-1$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(i,N)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(i,N) = \hat{p}_{c^0}(i) + c^0(\hat{T}_0(i,N) - \hat{T}_c^0(i))$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(\hat{M}_0,N)$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,N)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(\hat{M}_0,N) = \bar{p}_{Nat}(0,N) \frac{\hat{S}_0(N)}{S_{Nat}(N)} - \hat{\delta}_1(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,N)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{T}_0(0,N)$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{T}_0(0,N)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{p}_0(0,N) = p_{c^0}^0(0) + c^0(\hat{T}_0(0,N) - \hat{T}_c^0(0)) - \hat{\delta}_1(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{T}_0(\hat{M}_0,N)}$$

- $\hat{\theta}'_0(j)$ n' existe pas.

- $\hat{Q}_0(j)$ n' existe pas.

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{w}_0(j) \quad j=M_0+1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{w}_0(j)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_0(j) = & \gamma_{Nat}(j) + \bar{p}_{Nat}(0,N) \frac{\hat{T}_0(\hat{M}_0,j)}{S_{Nat}(j)} \\ & \hat{p}_0(0,j) \left[\frac{\hat{Q}_1(j) \hat{\theta}'_1(j) + \hat{S}_1(j) \hat{T}_1(\hat{M}_1,j)}{\hat{S}_0^2(j)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{\rho}_0 \left[\sum_{i=1}^{\hat{M}_0} \hat{\rho}_0(i,j+1) (1-\hat{\alpha}_0 \Delta t) \frac{1}{\lambda_0} (-\hat{T}_0(i,j) + \hat{T}_0(i-1,j)) \right] \\
 & + \left[\sum_{i=1}^{\hat{M}_0} \hat{\rho}_0(i,j+1) (1-\hat{\alpha}_0 \Delta t) \frac{1}{\lambda_0} (-\hat{T}_0(i,j) + \hat{T}_0(i-1,j)) \right] \\
 & \hat{\delta}_i(j) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{S}_0(j)}
 \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{w}_0(N)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \hat{w}_0(N)} & \equiv 0 \iff \gamma_0(N) = \gamma_{Net}(N) + \bar{p}_{Net}(0,j) \frac{\hat{T}_0(\hat{M}_0,N)}{S_{Net}(N)} \\
 & \hat{p}_0(0,N) \left[\frac{\hat{Q}_1(N) \hat{\rho}_1'(N) + \hat{S}_i(N) \hat{T}_i(\hat{M}_i,N)}{\hat{S}_0'(N)} \right] \\
 & \hat{\delta}_i(N) \frac{\partial \psi_0(\dots)}{\partial \hat{S}_0(N)}
 \end{aligned}$$

□ NOEUD FEUILLE $k = N_{st}$: Dérivation par rapport aux variables d'état à un noeud feuille

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\Delta \hat{p}_{Nst}(j) \quad j = M_0 + 1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta \hat{p}_{Nst}(j)} = 0 \iff \hat{\xi}_{Nst}(j) = \frac{\partial \Pi_{i_1} [\gamma_{Nst}(\hat{Q}_{Nst}(j)) - \Delta \hat{p}_{Nst}(j), \gamma_{Nst}(j)]}{\partial y_1}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{\theta}'_{Nst}(j) \quad j = M_0 + 1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\theta}'_{Nst}(j)} = 0 \iff \hat{\xi}_{Nst}(j) = \hat{p}_{Nst-1}(0, j)$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{Q}_{Nst}(j) \quad j = M_0 + 1, N$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Q}_{Nst}(j)} = 0 \iff \hat{\eta}_{Nst}(j) = \gamma_{Nst-1}(j) + \frac{\partial \Pi_{i_1} [\gamma_{Nst}(\hat{Q}_{Nst}(j)) - \Delta \hat{p}_{Nst}(j), \gamma_{Nst}(j)]}{\partial y_1} \frac{\partial g_{Nst}(\hat{Q}_{Nst}(j))}{\partial \hat{Q}_{Nst}(j)}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{\theta}^{\Delta}_{Nst}(j) = \hat{T}_{Nst}(0, j) \quad j = M_0 + 1, N-1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, j)} = 0 \iff \hat{p}_{Nst}(0, j) = & \frac{\partial \Pi_{i_2} [f_{Nst}(\hat{W}_{Nst}^{\Delta}(j)) - \hat{T}_{Nst-1}(\hat{M}_{Nst-1}, j), \hat{\mu}_{Nst}(j)]}{\partial y_1} \\ & + \hat{\eta}_{Nst}(j) \frac{\partial \phi_{Nst}(\hat{T}_{Nst}(0, j), \hat{W}_{Nst}^{\Delta}(j))}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, j)} \\ & + \hat{\xi}_{Nst}(j) \frac{\partial \Phi_{Nst}(\hat{T}_{Nst}(0, j), \hat{W}_{Nst}^{\Delta}(j))}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, j)} \end{aligned}$$

- Calcul de la dérivée de L par rapport à $\hat{\theta}^{\Delta}_{Nst}(j) = \hat{T}_{Nst}(0, j)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, N)} = 0 \iff \hat{p}_{Nst}(0, N) = & \frac{\partial \Pi_{i_2} [f_{Nst}(\hat{W}_{Nst}^{\Delta}(N)) - \hat{T}_{Nst-1}(\hat{M}_{Nst-1}, N), \hat{\mu}_{Nst}(N)]}{\partial y_1} \\ & + \hat{\eta}_{Nst}(N) \frac{\partial \phi_{Nst}(\hat{T}_{Nst}(0, N), \hat{W}_{Nst}^{\Delta}(N))}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, N)} \\ & + \hat{\xi}_{Nst}(N) \frac{\partial \Phi_{Nst}(\hat{T}_{Nst}(0, N), \hat{W}_{Nst}^{\Delta}(N))}{\partial \hat{T}_{Nst}(0, N)} \end{aligned}$$

ANNEXE II

DETAILS DES SIMULATIONS

1. Caractéristiques des réseaux étudiées

1.1. Notations et unités utilisées

• Caractéristiques d'un échangeur k:

| | |
|---|--------------|
| → coefficient d'échange thermique de l'échangeur (W/m^2C°) | α_k |
| → surface de l'échangeur (m^2) | S_k |
| → débit dans le circuit secondaire de l'échangeur (Kg / s) | $Q_{2,k}$ |
| → température à la sortie de l'échangeur secondaire (C°) | θ_2^k |
| → résistance hydraulique de l'échangeur ($m^{-1}Kg^{-1}$) | R_k |

• Caractéristiques d'une conduite k:

| | |
|---|--------------------------|
| → diamètre intérieur de la conduite (m) | D_o^k |
| → diamètre extérieur de la conduite (m) | D_i^k |
| → diamètre extérieur de l'isolant (m) | D_g^k |
| → longueur de la conduite (m) | L_k |
| → température de l'air du caniveau (C°) | $\theta_0 = 10^{\circ}C$ |
| → masse volumique de l'eau (Kg/m^3) | $\rho_0 = 1000$ |
| → capacité calorifique de l'eau (J/KgC°) | $C_{p0} = 4218$ |
| → coefficient de conductibilité thermique métal-eau (J/msC°) | $k_1 =$ |
| → coefficient de conductibilité thermique isolant-air (J/msC°) | $k_2 = 0.04$ |
| → coefficient de perte linéaire de charge (sans dimension) | Λ |
| → coefficient de perte singulière de charge (sans dimension) | ζ |

1.2. Caractéristiques du réseau 1

| RESEAU 1 | | | | |
|----------|--------------|--|--|---|
| | Définition | Demande 2 niveaux date de changement | Caractéristiques Echangeur ($\alpha, s, Q_2, \theta_2, R$) | Caractéristiques Conduite (D_0, D_2, L, A, C) |
| Noeud 1 | Chaufferie | - - | | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |
| Noeud 2 | Sous-station | 1500000 2245000 20000 s. | 4000 9 27 90 1690 | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |
| Noeud 3 | Sous-station | 1500000 2245000 20000 s. | 4000 9 27 90 1690 | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |

1.3. Caractéristiques du réseau 2

| RESEAU 2 | | | | |
|----------|--------------|--|--|---|
| | Définition | Demande 2 niveaux date de changement | Caractéristiques Echangeur ($\alpha, \beta, Q_2, \theta_2, R$) | Caractéristiques Conduite (D_1, D_2, L, A, ζ) |
| Noeud 1 | Chaufferie | - | - | 0.10 0.18 500 0.015 5 |
| Noeud 2 | Sous-station | 60000 60000 - 1690 | 4000 9 27 90 1690 | 0.10 0.18 500 0.015 5 |
| Noeud 3 | Sous-station | 60000 120000 500 s. 1690 | 4000 9 27 90 1690 | - - - - |
| Noeud 4 | Noeud fictif | - | - | 0.05 0.13 500 0.015 5 |
| Noeud 5 | Sous-station | 60000 60000 | 4000 9 27 90 1690 | - - - - |
| Noeud 6 | Noeud fictif | - | - | 0.05 0.13 800 0.015 5 |
| Noeud 7 | Sous-station | 120000 60000 3000 s. | 4000 9 27 90 1690 | - |

2. Etude complète de la simulation sur le réseau 1

On a effectué la simulation avec le **premier**, le **deuxième** et le **troisième schéma**.

2.1. Discrétisations adoptées pour les trois schémas

| Discrétisation adoptée pour les trois schémas | | | | |
|---|-------------|-------------|-----------------------|--|
| | | 1 schéma | 2 ^e schéma | 3 ^e schéma (initialisation sur le nombre de particules) |
| Nombre de points en espace pas en espace correspondant Δx_k | conduite 1 | 20 52,6m | 30 34,5m | 20 52,6m |
| | conduite 2 | 20 52,6m | 60 17m | 20 52,6m |
| | conduite 3 | | - | |
| pas en temps Δt (ou Δt_k) | conduite 1 | 162s | 180s | - |
| | conduite 2 | 162s | 160s | |
| | conduite 3 | 162s | 160s | |
| pas d'horloge Δt_b | | | | 160s |
| nombre maximum de particules | conduite 1 | - | | aller: 60 Retour: 35 |
| | conduite 2 | | - | aller: 65 Retour: 60 |
| | conduite 3 | | - | - |
| nombre de pas en temps sur $[0, T_f]$ | conduite 1 | 186 | 167 | 633 |
| | conduite 2 | 186 | 192 | 633 |
| | conduites 3 | 186 | 192 | 633 |

2.2. Coûts de fonctionnement obtenus pour les trois schémas

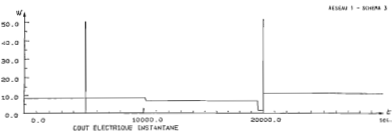
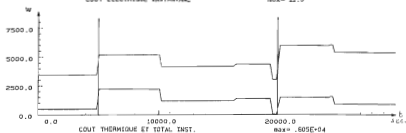
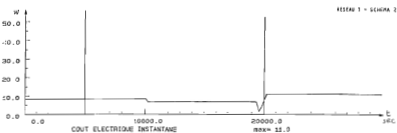
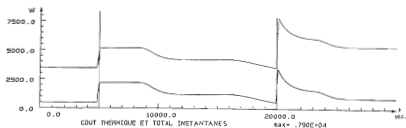
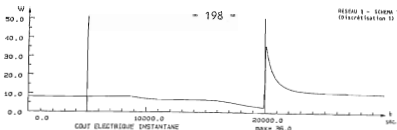
| Coûts de fonctionnement sur $[0, T_d]$ | | | |
|---|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | 1 ^{er} schéma | 2 ^{ème} schéma | 3 ^{ème} schéma |
| coût thermique avec demandes incluses | 14209.10^4 | 14158.10^4 | 14234.10^4 |
| coût thermique sans demandes incluses | 37175.10^3 | 36784.10^3 | 37166.10^3 |
| coût électrique | 26663.10^3 | 25460.10^3 | 25667.10^3 |
| coût total avec demandes incluses | 14236.10^4 | 14183.10^4 | 14260.10^4 |
| coût total sans demandes incluses | 37442.10^3 | 37039.10^3 | 37166.10^3 |

2.3. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'états pour les trois schémas

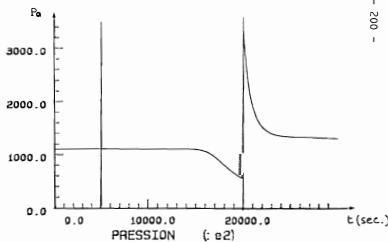
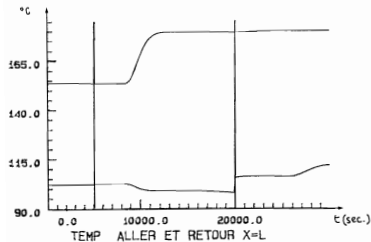
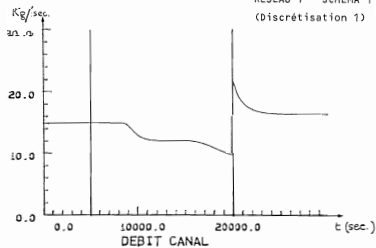
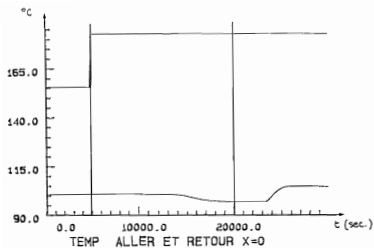
Pour chacun des trois schémas, on a les quatre séries de courbes suivantes:

- Courbes des coûts instantanés électriques, thermiques, totaux.
(Ces courbes sont rapportées sur la même page pour qu'on puisse rapidement percevoir les particularités numériques de chaque schéma.)
- Courbes des états associés au noeud chaufferie 1.
- Courbes des états associés au noeud linéaire 2.
- Courbes des états associés au noeud feuille 3.

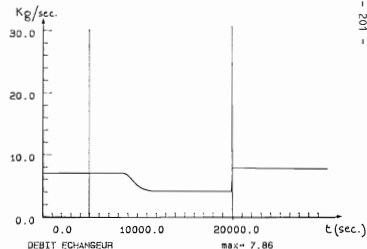
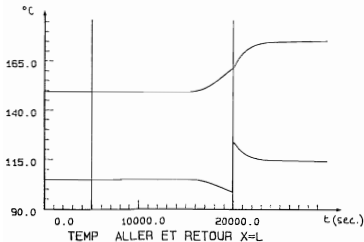
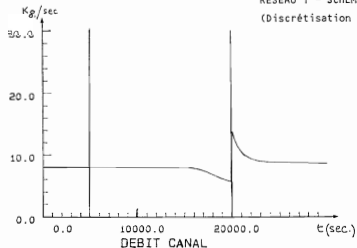
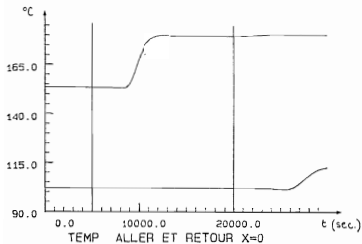
COURBES DES COUTS DE FONCTIONNEMENT
POUR LES TROIS SCHEMAS NUMERIQUES



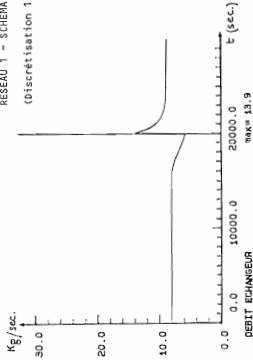
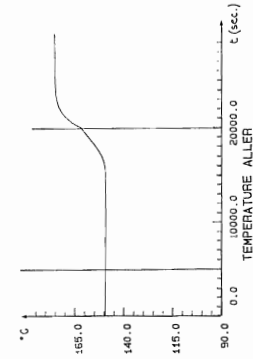
COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE PREMIER SCHEMA NUMERIQUE



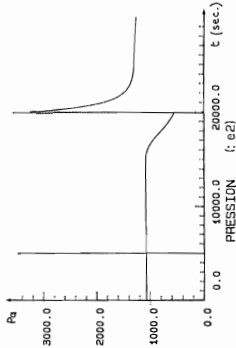
NOEUD 1 (CHAUFFERIE)



NOEUD 2 (LINEAIRE)

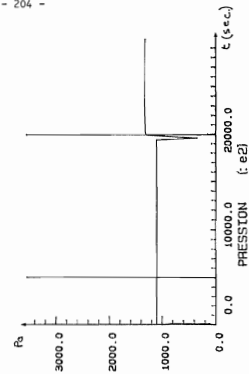
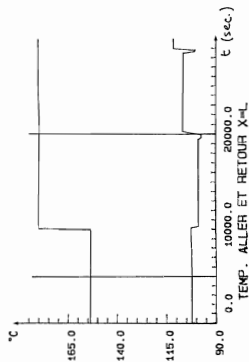
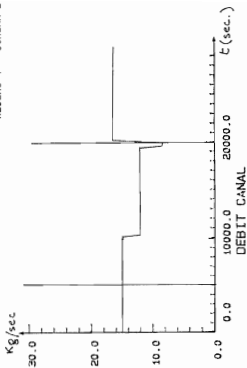
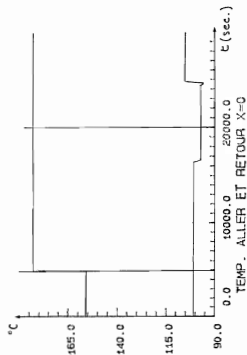


- 202 -

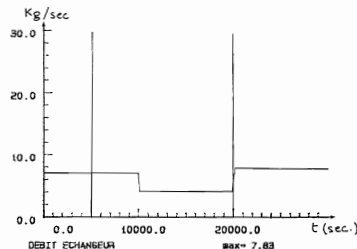
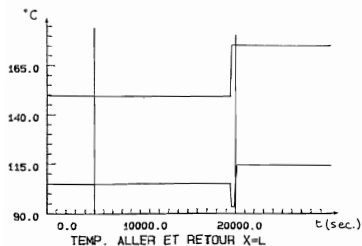
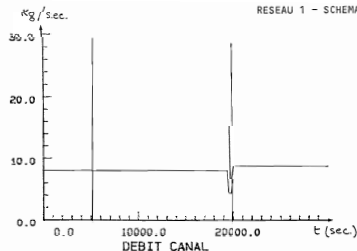
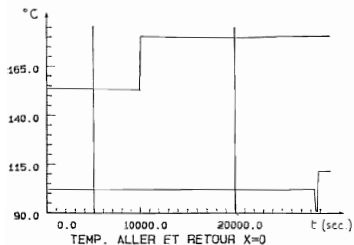


NOEUD 3 (FEUILLE)

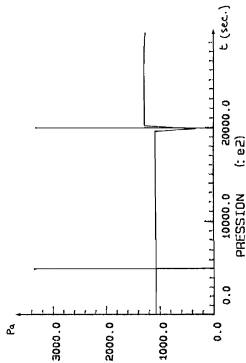
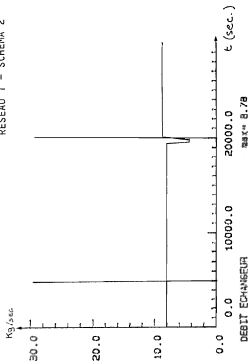
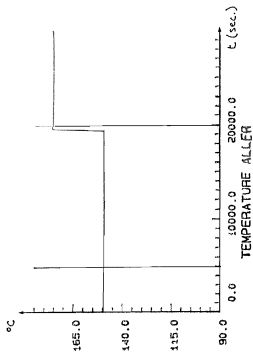
COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE DEUXIEME SCHEMA NUMERIQUE



NOEUD 1 (CHAUFFERIE)

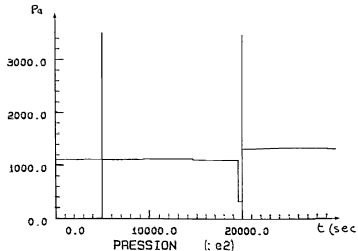
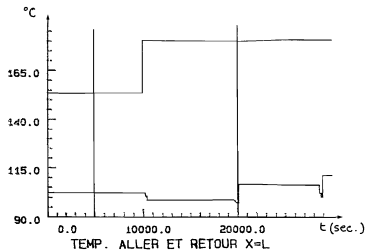
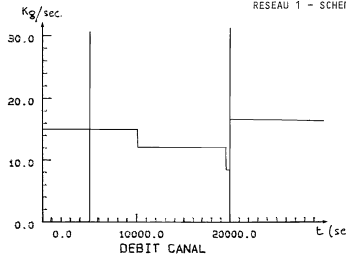
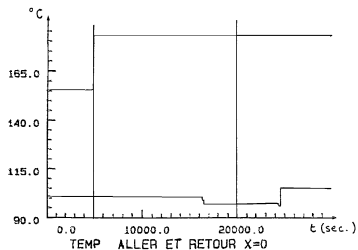


NOEUD 2 (LINEAIRE)

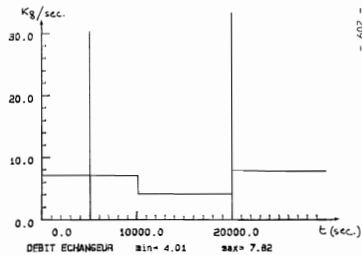
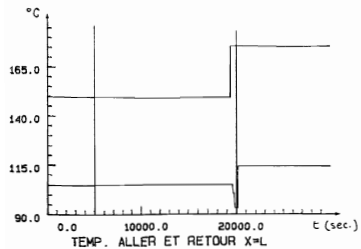
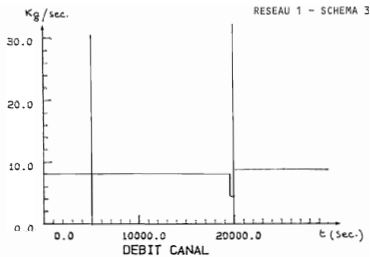
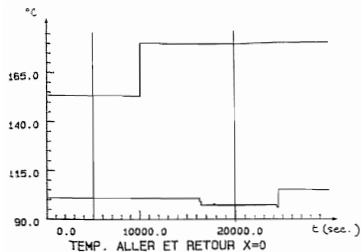


NOEUD 3 (FEUILLE)

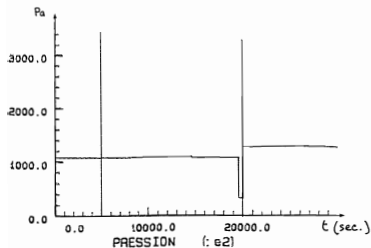
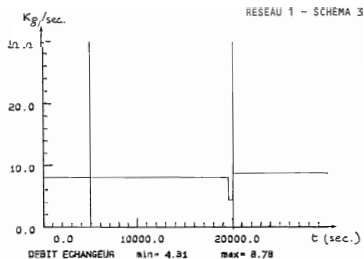
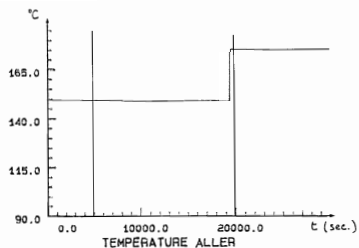
COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE TROISIEME SCHEMA NUMERIQUE



NOEUD 1 (CHAUFFERIE)



NOEUD 2 (LINEAIRE)



NOEUD 3 (FEUILLE)

2.4. Courbes d'évolution pour une discrétisation plus fine pour le premier schéma

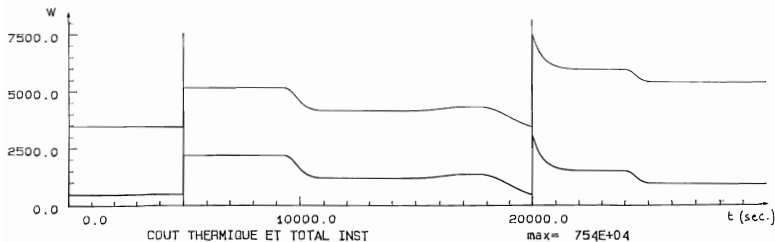
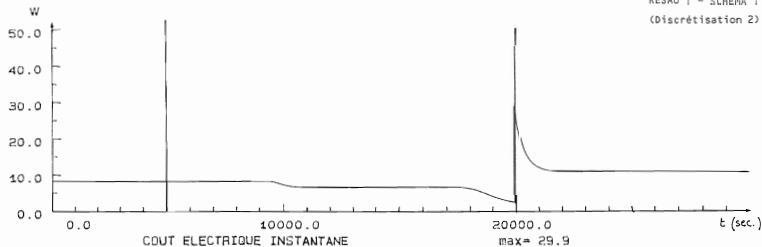
Les pas en espace pour les deux canalisations sont cinq fois plus petit que pour la simulation 1 vue précédemment.

On a les quatre séries de courbes suivantes:

- Courbes des coûts instantanés électriques, thermiques, totaux.
(Ces courbes sont rapportées sur la même page pour qu'on puisse rapidement percevoir les particularités numériques de chaque schéma.)
- Courbes des états associés au noeud chaufferie 1.
- Courbes des états associés au noeud linéaire 2.
- Courbes des états associés au noeud feuille 3.

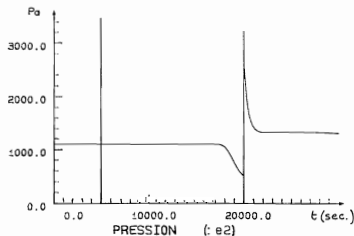
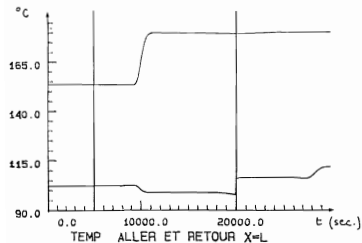
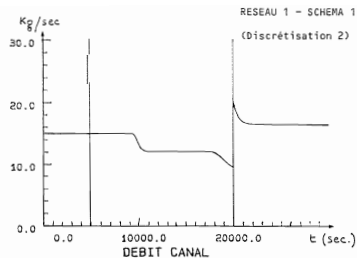
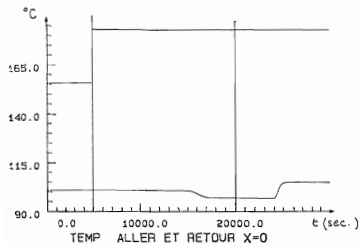


COURBES DES COUTS DE FONCTIONNEMENT
POUR LE PREMIER SCHEMA NUMERIQUE
(discrétisation plus fine)

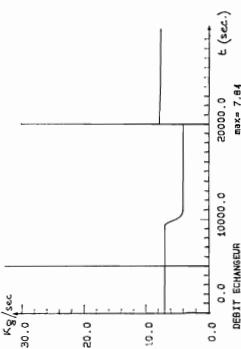
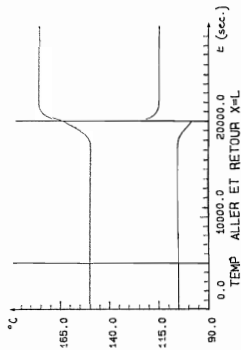
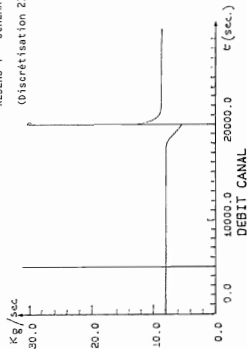
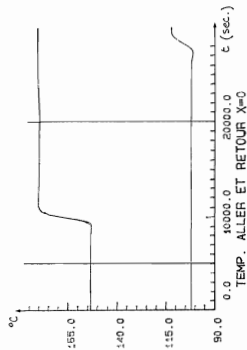


COÛTS INSTANTANES

COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE PREMIER SCHEMA NUMERIQUE
(discrétisation plus fine)

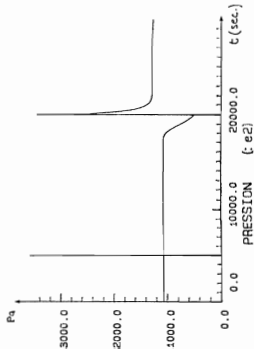
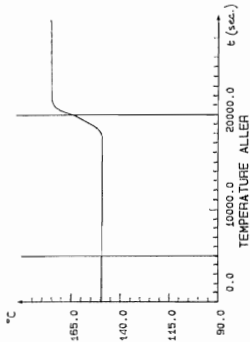


NOEUD 1 (CHAUFFERIE)

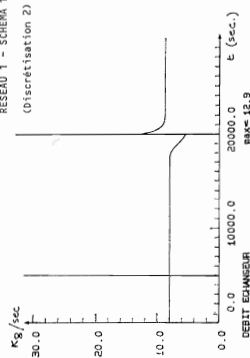


NOEUD 2 (LINEAIRE)

(Discretisation 2)



NOEUD 3 (FEUILLE)



2.5. Coûts de fonctionnement pour différentes discrétisations

| | Discrétisations | | Coûts | | | |
|------------|--|--|---------------------|---------------------|--------------|--------------|
| | Δx (m) canalisation 1 canalisation 2 | Δt (s) canalisation 1 canalisation 2 | thermique avec W | thermique sans W | électrique | total |
| 1 schéma | 52,6 (20 points) 52.6 (") | 162 " | 14209.10^4 | 37175.10^3 | 26663.10^1 | 37442.10^3 |
| | 20.4 (50 points) 20.4 (") | 63 " | 14183.10^4 | 36913.10^3 | 26070.10^1 | 37174.10^3 |
| | 10 (100 points) 10 (") | 31 " | 14171.10^4 | 36791.10^3 | 25754.10^1 | 37048.10^3 |
| 2 ° schéma | 34.5 (30 points) 17 (60 points) | 180 156 | 14158.10^4 | 36784.10^3 | 25460.10^1 | 37039.10^3 |
| | 25.6 (40 points) 12.7 (80 points) | 133 117 | 14164.10^4 | 36880.10^3 | 25393.10^1 | 37134.10^3 |
| | 20.4 (50 points) 10 (100 points) | 106 93 | 14143.10^4 | 36496.10^3 | 25325.10^1 | 36794.10^3 |
| | | | | | | |
| 3 ° schéma | 52,6 (20 part.) | 160 | 14234.10^4 | 36909.10^3 | 25667.10^1 | 37166.10^3 |
| | 52.6 (20 part.) | 60 | 14179.10^4 | 36779.10^3 | 25537.10^1 | 37035.10^3 |

3. Etude de la simulation sur le réseau 2

On a effectué la simulation avec le **premier** et le **troisième schéma**.

3.1. Discrétisations adoptées pour les deux schémas

| Discrétisation adoptée pour les 2 schémas | | | |
|---|------------------|-----------|---|
| | | 1 schéma | 3 ' schéma (initialisation sur le nombre de particules) |
| Nombre de points en espace pas en espace correspondant Δx_k | conduite 1 | 20 25m | 10 50m |
| | conduite 2 | 20 25m | 10 50m |
| | conduite 4 | 20 25m | 10 50m |
| | conduite 5 | 20 40m | 10 80m |
| pas en temps Δt | conduite 1,2,4,5 | 7s | - |
| pas d'horloge Δt_b | | - | 30s |
| nombre de pas en temps sur $[0, T_f]$ | | 901 | 1442 |

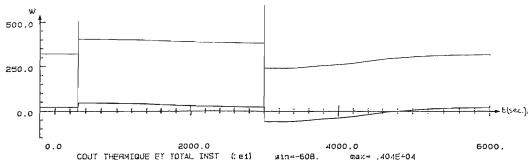
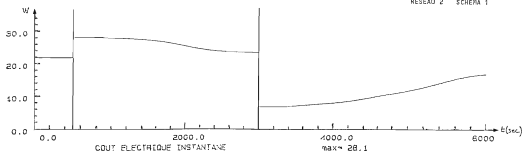
3.2. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'états pour les deux schémas

Pour chacun des deux schémas, on a les six séries de courbes suivantes:

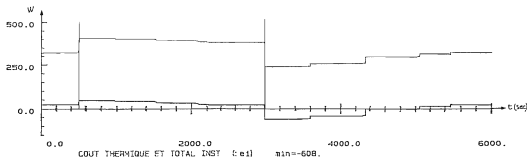
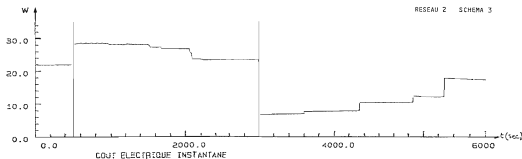
- Courbes des coûts instantanés électriques, thermiques, totaux.
(Ces courbes sont rapportées sur la même page.)
- Courbes des états associés au noeud chaufferie 1.
- Courbes des états associés au noeud linéaire 2.
- Courbes des états associés au noeud avant embranchement 3.
- Courbes des états associés au noeud feuille 5.
- Courbes des états associés au noeud feuille 7

COURBES DES COUTS DE FONCTIONNEMENT
POUR LES DEUX SCHEMAS NUMERIQUES

RESEAU 2 SCHEMA 1

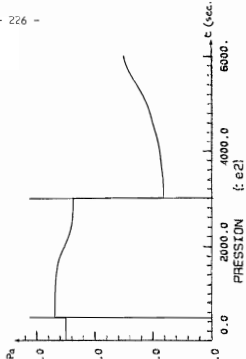
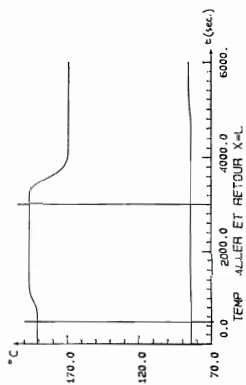
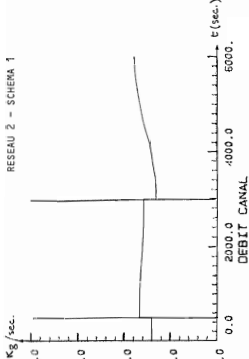
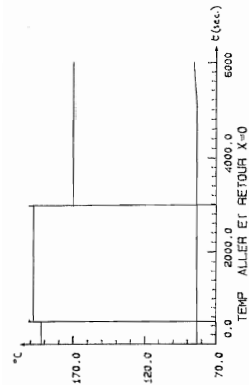


RESEAU 2 SCHEMA 3

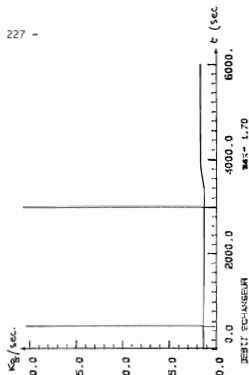
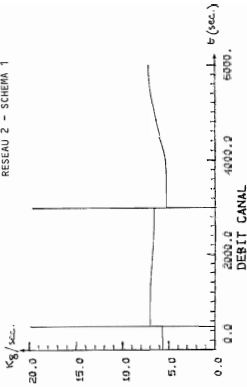
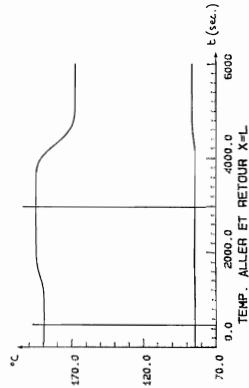
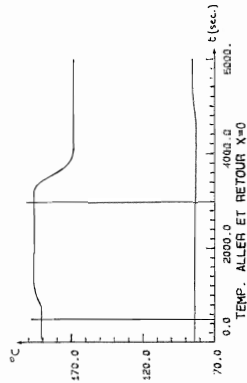


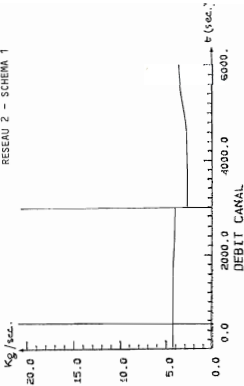
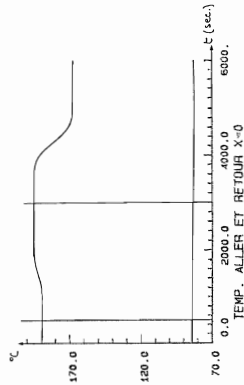
COUTS INSTANTANES

COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE PREMIER SCHEMA NUMERIQUE



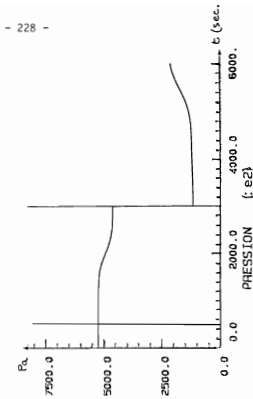
NOEUD 1 (CHAUFFERIE)





$K_g/sec.$

R_a



NOEUD 3 (AVANT EMBRAN.)

DEBIT ECHANGEUR

$W_{EX} = 3.64$

τ (sec.)

τ (sec.)

6000.

4000.0

2000.0

0.0

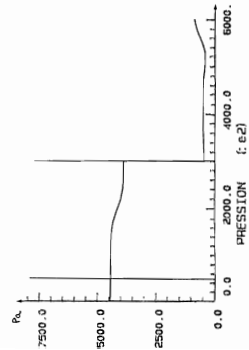
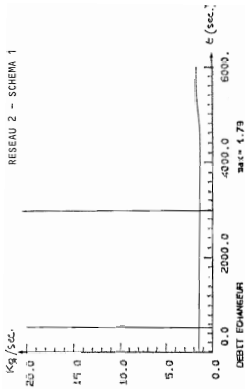
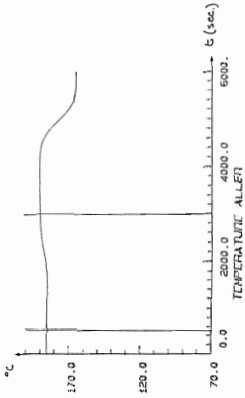
7500.0

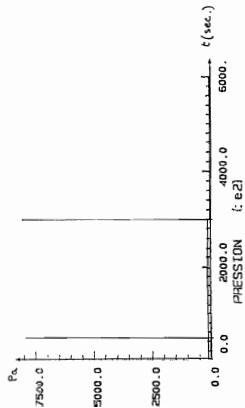
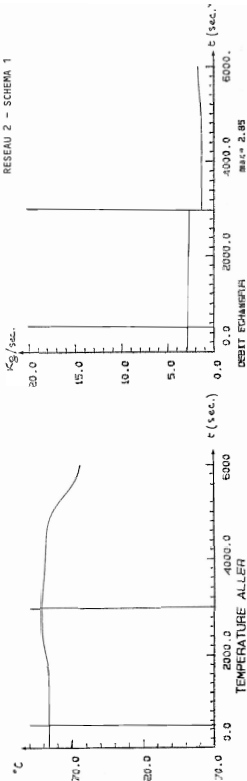
5000.0

2500.0

0.0

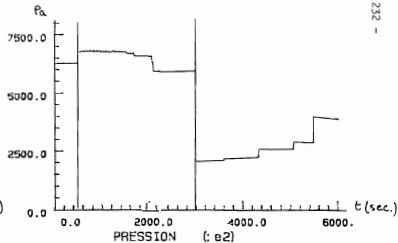
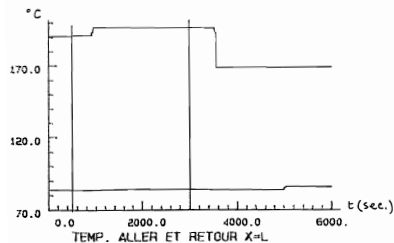
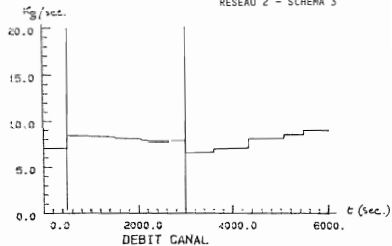
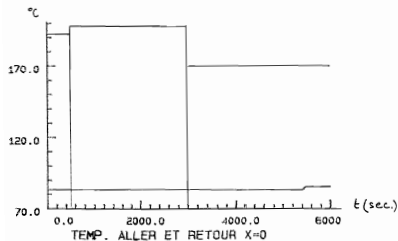
PRESSION (e2)



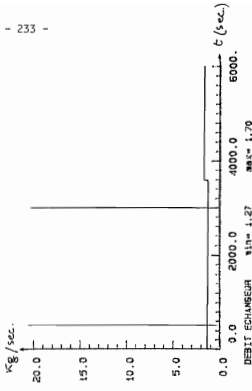
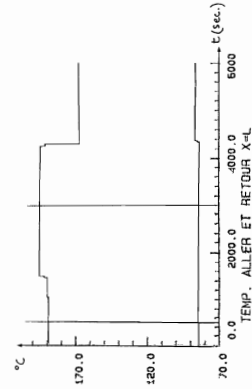
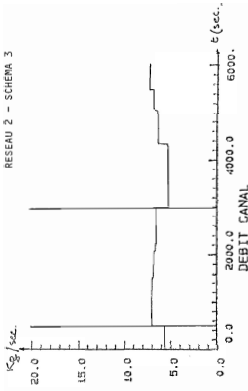
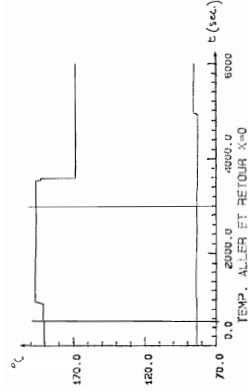


NOEUD 7 (FEUILLE)

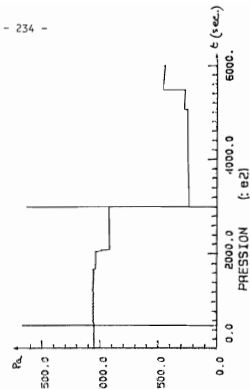
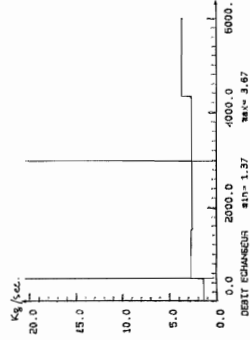
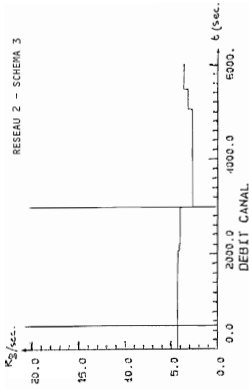
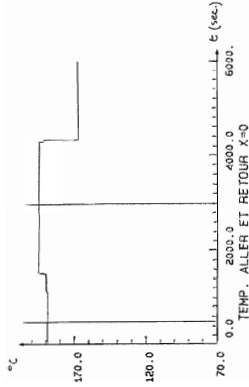
COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT
POUR LE TROISIEME SCHEMA NUMERIQUE



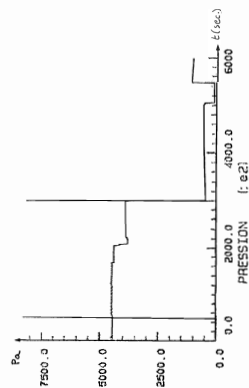
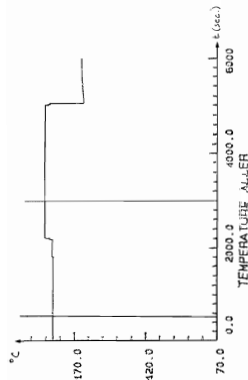
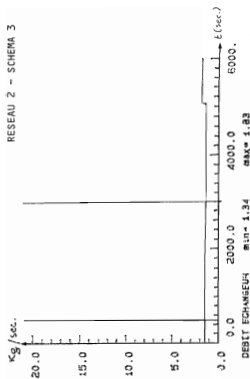
NOEUD 1 (CHAUFFERIE)



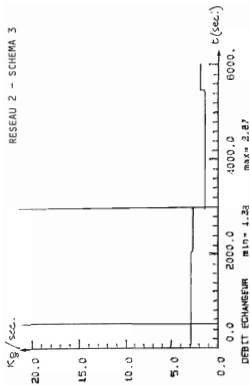
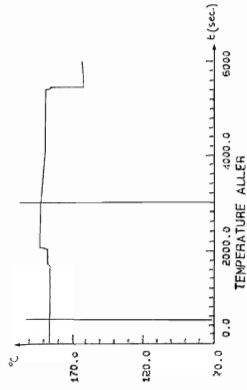
NOEUD 2 (LINEAIRE)



NOEUD 3 (AVANT EMBRAN.)



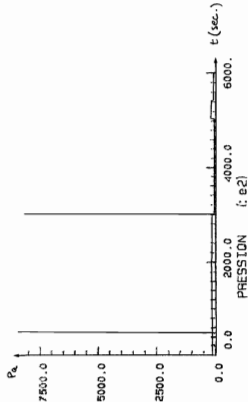
NOEUD 5 (FEUILLE)



TEMPERATURE ALLER

DEBIT ECHANGEUR min= 1.33

max= 2.87



PRESSION (: e2)

NOEUD 7 (FEUILLE)

ANNEXE III

DETAILS DES OPTIMISATIONS

1. Réseau à une chaufferie, une sous-station

1.1. Caractéristiques du réseau

| RESEAU 1 | | | | |
|----------|--------------|--|--|---|
| | Définition | Demande 2 niveaux date de changement | Caractéristiques Echangeur ($\alpha, \beta, Q_0, \theta_0, R$) | Caractéristiques Conduite (D_0, D_2, L, A, C) |
| Noeud 1 | Chaufferie | - | | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |
| Noeud 2 | Sous-station | 1500000 2000000 3215 s. | 4000 17 56 90 1690 | - - |

1.2. Courbes d'évolution des températures, du débit

Nous rapportons les courbes obtenues pour les essais suivants:

- Augmentation de demande
- Diminution de demande
- Variation du tarif électrique

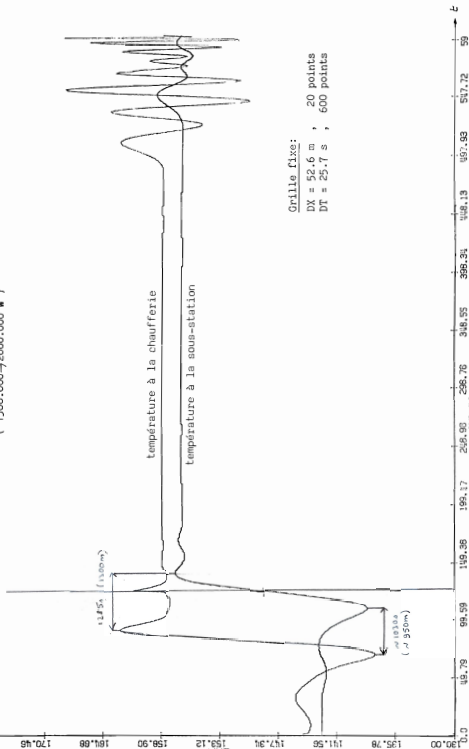


AUGMENTATION DE DEMANDE

- courbes des températures
- courbe du débit

Variation de demande (T= 125 DT)

(1500.000 → 2000.000 W)



Grille fixe:

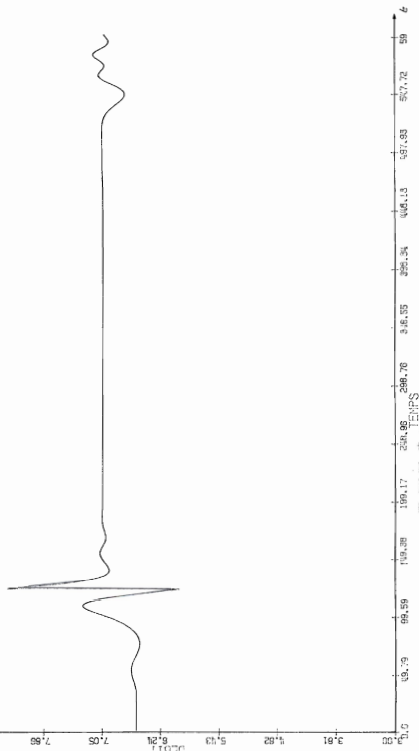
$\Delta X = 52.6 \text{ m}$, 20 points

DT = 25.7 s , 600 points

(300ème PAS D'ALGORITHME)

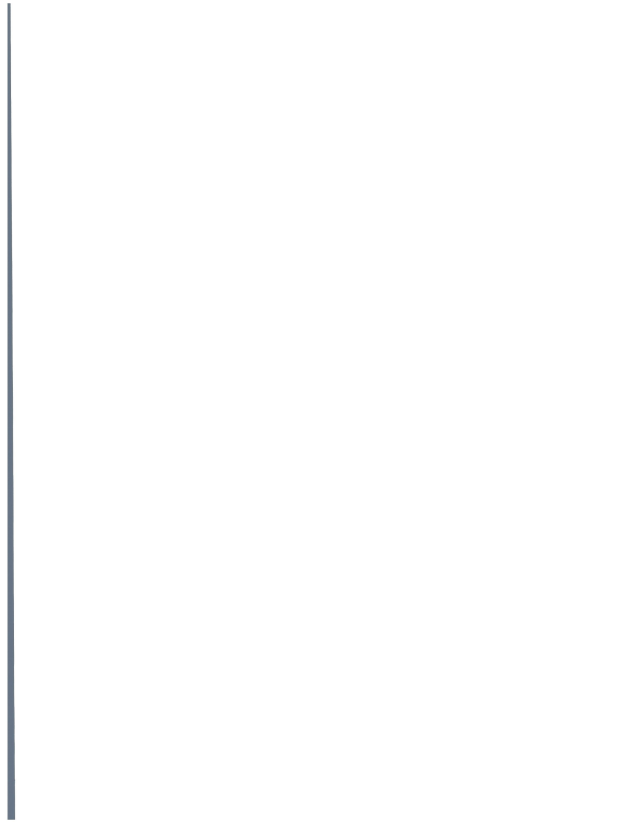
Variation de demande (T= 125 DT)

(1500.000 → 2000.000 W)



DEBIT

(300ème PAS D'ALGORITHME)

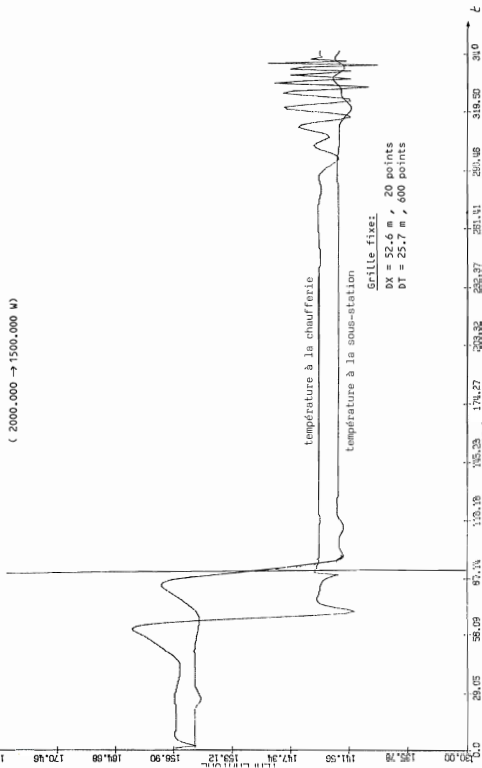


DIMINUTION DE DEMANDE

- courbes des températures
- courbe du débit

Variation de demande (T = 90 DT)

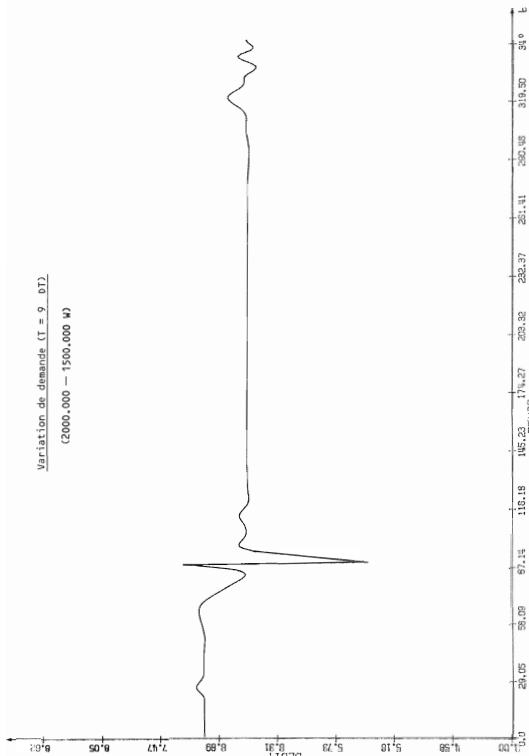
(2000.000 → 1500.000 W)



(200ème PAS D'ALGORITHME)

Variation de demande (T = 9 DT)

(2000.000 — 1500.000 M)



DEBIT

TEMPS

(200ème PAS D'ALGORITHME)

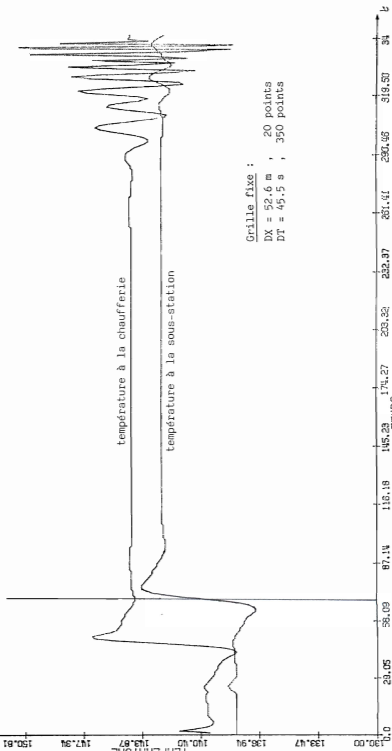


VARIATION DE TARIF ELECTRIQUE

courbes des températures
- courbe du débit

Variation tarif électrique (T = 70 DT)

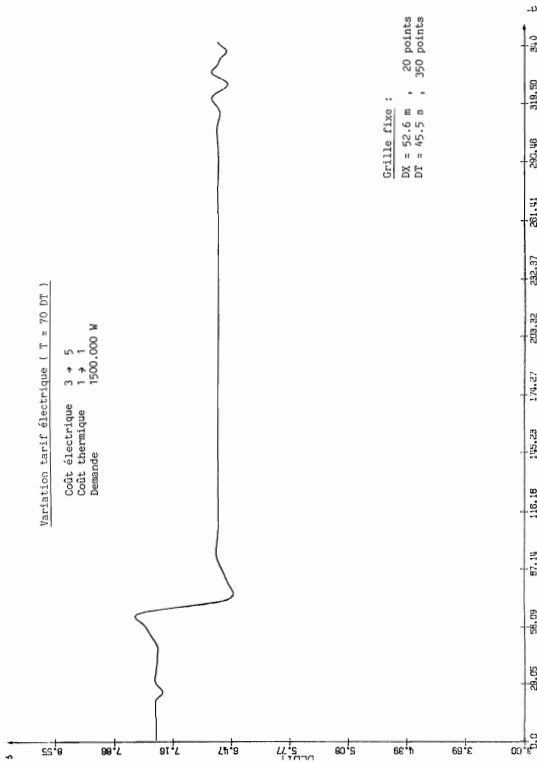
Coût électrique 3 → 5
Coût thermique 1 → 1
Demande 1500.000 W



(250ème PAS D'ALGORITHME)

Variation tarif électrique (T = 70 DT)

Coût électrique 3 → 5
Coût thermique 1 → 1
Demande 1500.000 W



Grille fixe :

DX = 52.6 m , 20 points
DT = 45.5 s , 350 points

(250ème PAS D'ALGORITHME)

2. Réseau linéaire à une chaufferie, deux sous-stations

Il s'agit du RESEAU 1 étudié en simulation.

2.1. Caractéristiques du réseau

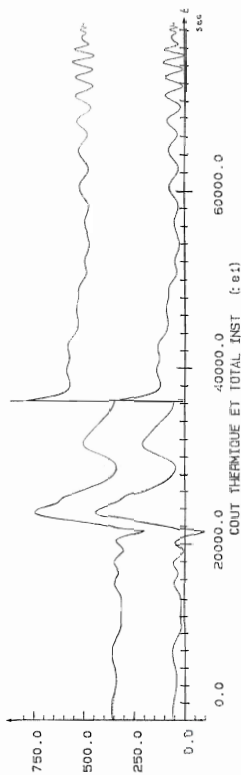
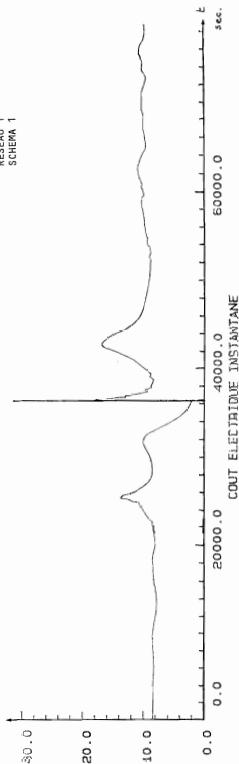
| RESEAU 1 | | | | |
|----------|--------------|--|--|--|
| | Définition | Demande 2 niveaux date de changement | Caractéristiques Echangeur ($\alpha, \beta, Q_n, \theta_n, R$) | Caractéristiques Conduite ($D_n, D_n, L_n, \lambda, \gamma$) |
| Noeud 1 | Chaufferie | - - | - | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |
| Noeud 2 | Sous-station | 1500000 2245000 36414 s. | 4000 9. 27 90 1690 | 0.30 0.40 1000 0.015 5 |
| Noeud 3 | Sous-station | 1500000 2245000 36414 s. | 4000 9 27 90 1690 | |

2.2. Courbes d'évolution des coûts, des variables d'états

On a les quatre séries de courbes suivantes:

- Courbes des coûts instantanés électriques, thermiques, totaux.
- Courbes des états associés au noeud chaufferie 1.
- Courbes des états associés au noeud linéaire 2.
- Courbes des états associés au noeud feuille 3.
- Courbes des différences de pression et des différences de pression minimum utiles aux échangeurs (R_k, Q_k^2).

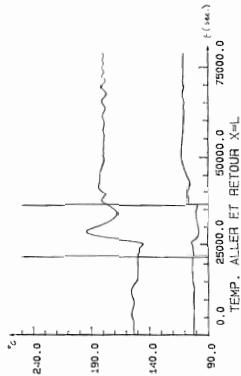
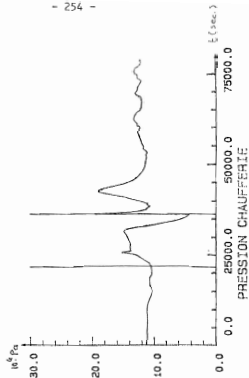
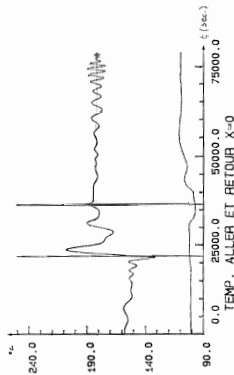
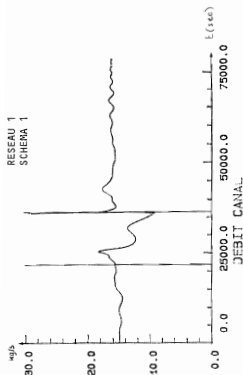
COURBES DES COUTS DE FONCTIONNEMENT



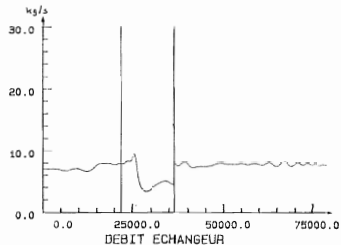
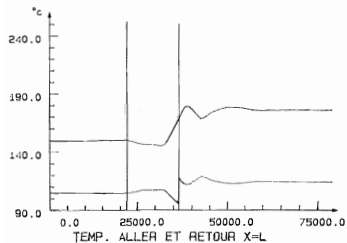
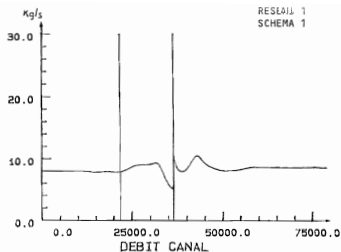
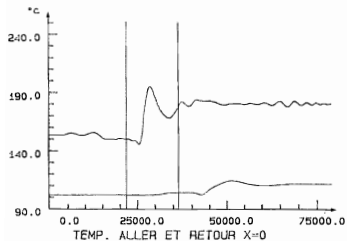
COUTS INSTANTANES

COURBES D'EVOLUTION DES VARIABLES D'ETAT

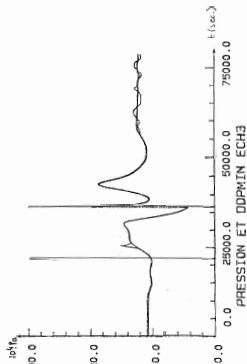
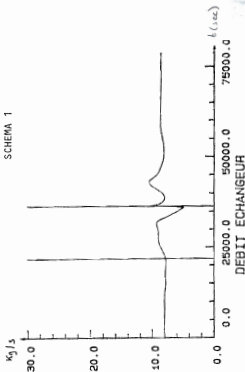
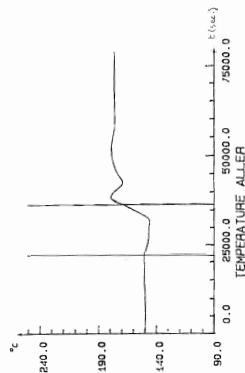
RESEAU 1
SCHEMA 1



NOEUD 1 (CHAUFFERIE)

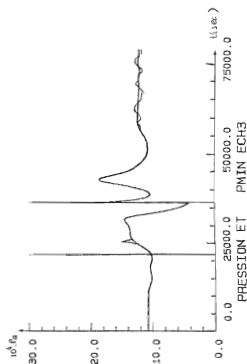
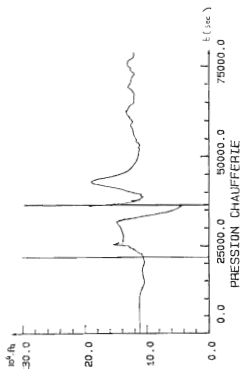
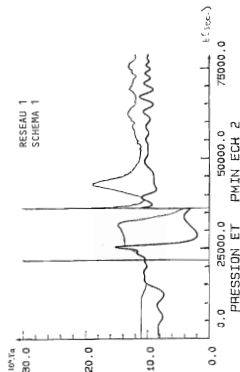


NOEUD 2 (LINEAIRE)



NOEUD 3 (FEUILLE)

COURBES DES DIFFERENCES DE PRESSION OBTENUES
ET DES DIFFERENCES DE PRESSION MINIMUM
AUX ECHANGEURS



Δ PRESSIONS ET Δ PMIN

Résumé de la thèse
de Renée LIDIN

COMMANDE DYNAMIQUE DE RESEAUX DE
CHAUFFAGE URBAIN

Les réseaux étudiés comportent une chaufferie produisant de l'eau à moyenne ou haute température. Des pompes électriques assurent la pression nécessaire au départ du réseau pour que cette eau circule avec un certain débit à travers des canalisations aller, desservent en chaleur les sous-stations et reviennent à la chaufferie à travers des canalisations retour. Le système comporte deux types de commande qui sont la température à l'entrée dans le réseau (sortie chaufferie) et la vitesse des pompes (qui détermine la différence de pression à l'entrée du réseau). Nous développons des logiciels d'aide à la compréhension du comportement dynamique du réseau, d'aide à sa gestion optimale face à des variations de données extérieures (consommations, tarifs énergétiques...). Nous modélisons puis optimisons le fonctionnement hydraulique et thermique du réseau, le critère à minimiser étant la somme sur une durée donnée $[0, T]$ du coût de production de l'eau chaude (dépendant du combustible utilisé, du mode de fonctionnement de la chaufferie) et du coût de fonctionnement des pompes (dépendant du tarif électrique). Pour qu'un algorithme d'optimisation ne cherche pas à baisser le niveau thermique du réseau sur la fin du domaine $[0, T]$ (afin de réduire le coût thermique), on fixe une contrainte finale sur l'état dans lequel on souhaite laisser le réseau au temps T . Pour la modélisation, nous donnons la liste des variables, des équations, des contraintes qui décrivent complètement le fonctionnement du réseau. Nous donnons la méthode de calcul de ces variables en régime statique basée sur un procédé "d'intégration" récursive dans l'espace. Nous étudions pour un réseau simple l'existence, l'unicité de la solution à l'équation aux dérivées partielles hyperbolique non linéaire de propagation des températures. Nous donnons plusieurs schémas de discrétisation pour sa résolution approchée. Pour un réseau complet, nous détaillons la méthode de calcul des variables basée sur les différents schémas et un procédé "d'intégration" récursive dans le temps et l'espace. Pour l'optimisation nous proposons une méthode de résolution du problème discrétisé basé sur une technique de Lagrangien augmenté, qui utilise des algorithmes de type Arrow-Hurwicz ou Uzawa. Le nombre des contraintes dualisées est important. Nous donnons des exemples de simulation et d'optimisation réalisées sur des petits réseaux afin de donner des interprétations simples de leur comportement dynamique.